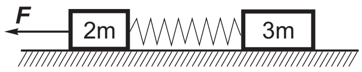
10 класс



1. На горизонтальной плоскости лежат два бруска массами $3m$ и $2m$, соединённые ненапряженной пружиной (см. рис.). Какую наименьшую постоянную силу, направленную горизонтально, нужно приложить к бруску массой $2m$, чтобы сдвинулся и другой брусок? Коэффициент трения брусков о плоскость μ.

Решение

Пусть брусок массой $3m$ остается неподвижным, брусок массой $2m$ смещается на x и останавливается. В этом случае сила F совершает работу по растяжению пружины и против сил трения:

$$Fx = \frac{kx^2}{2} + \mu 2mgx, \tag{41}$$

отсюда

$$F = \frac{kx}{2} + 2\mu mg. \tag{42}$$

Условие начала скольжения бруска $3m$

$$kx = \mu 3mg. \tag{43}$$

Из (42) и (43) получаем

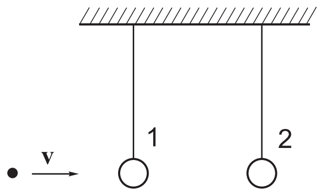
$$F_{min} = \frac{3\mu mg}{2} + 2\mu mg = \frac{7}{2}\mu mg. \tag{44}$$

Ответ: $\frac{7}{2}\mu mg$.

Критерии оценки

1. Правильно записан закон сохранения энергии для бруска $2m$ (41): *4 балла*
2. Правильно записан II закон Ньютона для бруска $3m$ (43): *3 балла*
3. Получен правильный ответ (44): *3 балла*

Максимальная оценка *10 баллов*



2. Пуля пробивает один из подвешенных грузиков и застревает в другом (см.рис.). Начальная скорость пули v, масса пули m равна массе каждого грузика. Найдите количество теплоты, выделившееся в первом грузике, если во втором выделилось количество теплоты Q.

Решение

Для попадания пули в первый грузик закон сохранения импульса

$$mv = mv_1 + mu, \tag{45}$$

закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + Q'. \tag{46}$$

Здесь v_1 - скорость пули после пробивания грузика, u - скорость первого грузика. Для попадания пули во второй грузик закон сохранения импульса

$$mv_1 = 2mu_1, \tag{47}$$

закон сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{2mu_1^2}{2} + Q. \tag{48}$$

Из (47) и (48) находим

$$Q = \frac{mv_1^2}{4}. \tag{49}$$

Далее решаем (45) и (45) с учетом (49). В результате получаем

$$Q' = 2v\sqrt{mQ} - 4Q. \tag{50}$$

Ответ:$2v\sqrt{mQ} - 4Q$.

Критерии оценки

1. За правильную запись каждого из уравнений (45) - (49): *1 балл*
2. Получен правильный ответ (50): *5 баллов*

Максимальная оценка *10 баллов*

3. Некоторое количество воды нагревается электронагревателем мощностью $P =$ 500 Вт. При включении нагревателя на время $\tau_1 = 2$ мин температура воды повысилась на $\Delta T = 1$ К, а при его отключении - понизилась за время $\tau_2 = 1$ мин на ту же величину ΔT. Какова масса нагреваемой воды, если потери тепла за счет рассеяния в окружающую среду пропорциональны времени? Удельная теплоемкость воды $c =$ 4200 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\,^\circ C}$. Решение

При нагревании воды закон сохранения энергии имеет вид:

$$P\tau_1 = cm\Delta T + G\tau_1, \tag{51}$$

а при остывании –

$$cm\Delta T = G\tau_2. \tag{52}$$

Здесь G – мощность отдачи тепла в окружающую среду. Из уравнений (7) и (8) находим

$$m = \frac{P\tau_1\tau_2}{c\Delta T(\tau_1 + \tau_2)} = 4.8\,\text{кг}. \tag{53}$$

Ответ 4.8 кг.

Критерии оценки

1. Правильно записан закон сохранения для нагревании (51): *3 балла*
2. Правильно записан закон сохранения для остывания (52): *3 балла*
2. Решена полученная система уравнений (53): *3 балла*
3. Получен правильный численный ответ: *1 балл*

Максимальная оценка *10 баллов*

4. Перед переездом на абсолютно пустой дороге стоит автомобиль. На светофоре указано, что переезд откроется через τ секунд. Водителю необходимо попасть в точку за переездом, расстояние до которой от автомобиля равно S, за минимальное время. Считать, что автомобиль может двигаться с постоянным по модулю ускорением a как вперед так и назад, кроме того, может резко, практически мгновенно затормозить (дорога сухая, автомобиль исправен). Определить минимальное время, за которое автомобиль может добраться до нужной точки.

Решение

Водитель может поступить следующим образом.

1-й вариант. Дождаться открытия переезда и двигаясь с ускорением a достигнуть требуемой точки. Для этого необходимо время

$$t_I = \tau + \sqrt{\frac{2s}{a}}. \tag{54}$$

2-й вариант. Водитель может использовать другую стратегию: к моменту открытия переезда необходимо приобрести максимально возможную скорость. Для этого необходимо за то время, пока закрыт переезд (τ): начать двигаться назад с ускорением a, резко затормозить, далее начать движение с ускорением a в сторону переезда так, чтобы оказаться у переезда к моменту его открытия. Очевидно, что время движения назад будет равно времени приближения к светофору и равно $tau/2$. Тогда расстояние, на которое автомобиль отъедет от переезда

$$s_0 = \frac{a\tau^2}{8}, \tag{55}$$

скорость автомобиля непосредственно перед открытием светофора

$$v_0 = a\tau/2, \tag{56}$$

закон движения автомобиля с момента открытия светофора

$$x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{57}$$

Время движения находится из уравнения $x(t) = s$ и равно

$$t = -\frac{v_0}{a} + \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} + \frac{2s}{a}}. \tag{58}$$

Тогда время движения во втором случае

$$t_{II} = t + \tau = \frac{\tau}{2} + \sqrt{\frac{\tau^2}{4} + \frac{2s}{a}} \tag{59}$$

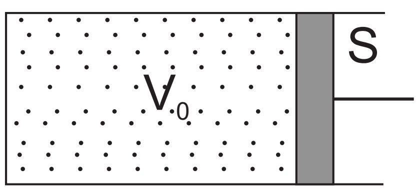
Очевидно, что вторая стратегия потребует меньше времени, т.е. $t_{II} < t_I$.

Ответ: $\frac{\tau}{2} + \sqrt{\frac{\tau^2}{4} + \frac{2s}{a}}$

<u>Критерии оценки</u>

1. Правильно найдено время движения в первом случае (54): *1 балл*
2. Правильно описана стратегия для второго случая: *3 балла*
3. Правильно найдено время движения во втором случае (58), (59) : *4 балла*
4. Сделан вывод о том, что время во втором случае меньше: *2 балла*

Максимальная оценка *10 баллов*



5. Идеальный одноатомный газ заполняет открытый цилиндрический сосуд с поршнем, который может двигаться практически без трения. Стенки сосуда и поршень теплоизолированы. Система находится в равновесии, площадь основания цилиндра $S = 200\,\text{см}^2$, начальный объем $V_0 = 3.0\,\text{л}$. Атмосферное давление $p_0 = 10^5\,\text{Па}$. Если в

такой системе надавить или потянуть за поршень, то можно ощутить некоторые "упругие" силы. Покажите, что при малых деформациях для системы выполняется закон Гука и найдите жесткость системы при малых деформациях.

Решение

Поскольку сосуд открыт, поршень может двигаться без трения, то при равновесии давление газа равно атмосферному. Сдвинем поршень на бесконечно малую величину $Deltax$, тогда объем газа станет равным $V_0+S\Delta x$, давление газа будет p_1. Под "упругой" силой будем понимать разность сил давления газа и атмосферы на поршень:

$$F_{\text{упр}} = p_1 S - p_0 S. \tag{60}$$

Процесс будет адиабатическим, следовательно первое начало термодинамики дает

$$0 = A + \Delta U \Rightarrow p_0 S\Delta x = -\frac{3}{2}\nu R\Delta T, \tag{61}$$

уравнения состояния:

$$p_0 V_0 = \nu R T_0, \quad p_1(V_0 = S\Delta x) = \nu R(T + \Delta T). \tag{62}$$

Из (61) и (62) находим

$$p_1 = \frac{\nu RT + \nu R\Delta T}{V_0 + S\Delta x} = \frac{p_0 V_0 - \dfrac{2}{3}p_0 S\Delta x}{V_0\left(1 + \dfrac{S\Delta x}{V_0}\right)} \approx p_0\left(1 - \frac{2S\Delta x}{3V_0}\right)\left(1 - \frac{S\Delta x}{V_0}\right). \tag{63}$$

С учетом малости $Deltax$ и оставляя только слагаемые первого порядка малости получаем

$$p_1 = p_0\left(1 - \frac{5}{3}\frac{S\Delta x}{V_0}\right). \tag{64}$$

В результате

$$F_{\text{упр}} = -\frac{5}{3}\frac{p_0 S^2}{V_0}\Delta x \tag{65}$$

и

$$k = \frac{5}{3}\frac{p_0 S^2}{V_0} = 22.4\,\frac{\text{кН}}{\text{м}}. \tag{66}$$

Ответ: $\frac{5}{3}\frac{p_0 S^2}{V_0} = 22.4\,\frac{\text{кН}}{\text{м}}$

Критерии оценки

1. Записаны первое начало и уравнения состояния (61), (62): *4 балла*
2. Получено выражение для давления газа при малом смещении поршня (64): *3 балла*
3. Получен ответ (66) : *3 балла*

Максимальная оценка *10 баллов*