Олимпиада Смарт Старт – 2017. Физика. Отборочный этап.

Решения и критерии.

8 класс

1. Тело, состоящее из куска льда и вмерзшего в него алюминиевого бруска, плавает в воде так, что под водой находится $\alpha = 0,95$ объема тела. Какой процент льда должен растаять, чтобы тело полностью погрузилось в воду? Плотность воды $\rho_\text{в} = 10^3\,\text{кг/м}^3$, льда $\rho_\text{л} = 900\,\text{кг/м}^3$, алюминия $\rho_a = 2.7\cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$.

Решение

Условие плавания

$$F_\text{арх} = m_\text{общ} g. \tag{1}$$

С учетом условия задачи

$$\rho_\text{в} g \alpha V_\text{общ} = (m_\text{ал} + m_\text{л}) g, \tag{2}$$

$$\rho_\text{в} \alpha \left(V_\text{л} + V_\text{ал}\right) = \rho_\text{л} V_\text{л} + \rho_\text{ал} V_\text{ал}. \tag{3}$$

После того, как растаяла часть льда β и тело стало плавать полностью погруженным в воду, получаем

$$\rho_\text{в} \left(V_\text{л}(1-\beta) + V_\text{ал}\right) = \rho_\text{л} V_\text{л}(1-\beta) + \rho_\text{ал} V_\text{ал}. \tag{4}$$

Разделим уравнения (3) и (4) на $V_\text{л}$, введем обозначение $\gamma = \dfrac{V_\text{ал}}{V_\text{л}}$, в результате получим систему уравнений с неизвестными γ и β:

$$\begin{cases} \rho_\text{в} \alpha \left(1+\gamma\right) = \rho_\text{л} + \rho_\text{ал}\gamma, \\ \rho_\text{в} \left(1-\beta+\gamma\right) = \rho_\text{л}(1-\beta) + \rho_\text{ал}\gamma. \end{cases} \tag{5}$$

Исключая γ, находим

$$1-\beta = \frac{\rho_\text{ал} - \rho_\text{в}}{\rho_\text{в} - \rho_\text{л}} \frac{\alpha\rho_\text{в} - \rho_\text{л}}{\rho_\text{ал} - \alpha\rho_\text{в}}. \tag{6}$$

Отсюда находим

$$\beta \approx 0.51$$

Ответ: 51%

Критерии оценки

1. Правильно записаны условия плавания с учетом данных задачи (3) и (4): *5 баллов*
2. Решена полученная система уравнений (5): *3 балла*
3. Получен правильный численный ответ: *2 балла*

Максимальная оценка *10 баллов*

2. Некоторое количество воды нагревается электронагревателем мощностью $P = 500$ Вт. При включении нагревателя на время $\tau_1 = 2$ мин температура воды повысилась на $\Delta T = 1$ К, а при его отключении - понизилась за время $\tau_2 = 1$ мин на ту же величину ΔT. Какова масса нагреваемой воды, если потери тепла за счет рассеяния в окружающую среду пропорциональны времени? Удельная теплоемкость воды $c = 4200\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\,^\circ C}$.

Решение

При нагревании воды закон сохранения энергии имеет вид:

$$P\tau_1 = cm\Delta T + G\tau_1, \tag{7}$$

а при остывании –

$$cm\Delta T = G\tau_2. \tag{8}$$

Здесь G – мощность отдачи тепла в окружающую среду. Из уравнений (7) и (8) находим

$$m = \frac{P\tau_1\tau_2}{c\Delta T(\tau_1+\tau_2)} = 4.8\,\text{кг}. \tag{9}$$

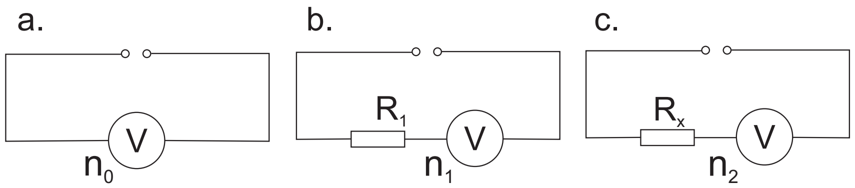
Ответ 4.8 кг.

<u>Критерии оценки</u>

1. Правильно записан закон сохранения для нагревании (7): *3 балла*
2. Правильно записан закон сохранения для остывания (8): *3 балла*
2. Решена полученная система уравнений (9): *3 балла*
3. Получен правильный численный ответ: *1 балл*

Максимальная оценка *10 баллов*

3. Имеются резисторы, сопротивление одного из них $R_1 = 0.5$ кОм, а другого R_x нужно измерить. Для этого, использовав источник постоянного электрического напряжения, собрали три цепи (см. рис. a, b, c). В первом случае стрелка вольтметра отклонилась на $n_0 = 16$ делений его шкалы, во втором – на $n_1 = 12$ делений и в третьем – на $n_2 = 10$ делений. Определите по этим данным сопротивление R_x второго резистора.



<u>Решение</u>

Обозначим цену деления вольтметра α, показания вольтметра в первом случае $U_0 = \alpha n_0$ равны напряжению источника. Во втором случае: показания вольтметра $U_1 = \alpha n_1$, напряжение на резисторе R_1 равно $U_{R_1} = U_0 - U_1 = \alpha(n_0 - n_1)$. При последовательном соединении сила тока одинакова:

$$\frac{\alpha n_1}{R_v} = \frac{\alpha(n_0-n_1)}{R_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{R_v} = \frac{(n_0-n_1)}{R_1}, \tag{10}$$

здесь R_v – сопротивление вольтметра.

Для третьего случая аналогично получаем

$$\frac{\alpha n_2}{R_v} = \frac{\alpha(n_0-n_2)}{R_x} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{R_v} = \frac{(n_0-n_2)}{R_x}. \tag{11}$$

Решая совместно уравнения (10) и (11), находим

$$R_x = \frac{n_1(n_0-n_2)}{n_2(n_0-n_1)}R_1 = 0.9\,\text{кОм}. \tag{12}$$

Ответ: 0.9 кОм.

<u>Критерии оценки</u>

1. Записаны показания вольтметра через цену деления и выражено напряжение на клеммах источника: *2 балла*

2. Правильно записан закон Ома и равенство токов для второго случая (10): *2 балла*
3. Правильно записан закон Ома и равенство токов для третьего случая (11): *2 балла*
4. Решена полученная система уравнений и записан ответ в общем виде (12): *3 балла*
5. Получен правильный численный ответ: *1 балл*
Максимальная оценка *10 баллов*

4. К коромыслу равноплечных весов подвешены два сплошных однородных шарика, сделанных из разных материалов, но имеющих одинаковые массы. Если теперь один из шариков поместить в жидкость плотностью 1000 кг/м^3, а другой – в жидкость плотностью 800 кг/м^3, то равновесие сохранится. Считая, что плотности шариков больше плотностей жидкостей, найдите отношение плотностей шариков.

Решение

Вес шарика в воздухе $P_в = mg$, в жидкости $P_в = mg - F_a$, гдеF_a – сила Архимеда. Так как весы равноплечие, массы шариков равны, то можно сделать вывод, что силы Архимеда, действовавшие на шарики, так же равны:

$$F_{a1} = F_{a2}. \tag{13}$$

Отсюда получаем

$$\rho_{ж1} g \frac{m}{\rho_1} = \rho_{ж2} g \frac{m}{\rho_2}, \tag{14}$$

где $\rho_{ж1}$ и $\rho_{ж2}$ – плотности первой и второй жидкостей, ρ_1 и ρ_2 - плотности первого и второго шариков. Из (14) находим

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_{ж1}}{\rho_{ж2}} = 1.25 \tag{15}$$

Ответ: 1.25

Критерии оценки

1. Записано выражение для веса тела в жидкости: *2 балла*
2. Сделан вывод о равенстве сил Архимеда (13) и (14): *4 балла*
3. Получено выражение для отношения плотностей шариков (15): *3 балла*
4. Получен правильный численный ответ: *1 балл*
Максимальная оценка *10 баллов*

5. В цилиндрический сосуд с водой опустили железную коробочку, из-за чего уровень воды в сосуде поднялся на 2 см. На сколько опустится уровень воды, если коробочку утопить? Плотности воды $\rho_в = 1000\,кг/м^3$ и железа $\rho_ж = 7800\,кг/м^3$.

Решение

Найдем изменения уровня воды в сосуде в двух случаях: при опускании в него коробочки так, чтобы она плавала (h_1) и опускании в него коробочки так, чтобы она тонула (h_2). Очевидно, что изменение уровня воды в сосуде, в котором уже плавает коробочка, из-за того, что коробочку утопили будет равно

$$\Delta h = h_1 - h_2. \tag{16}$$

Из условия плавания коробочки

$$m_к g = \rho_в g h_1 S \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{m_к}{\rho_в S}, \tag{17}$$

где S – площадь дна сосуда. Во втором случае

$$h_2 = \frac{m_к}{\rho_ж S}. \tag{18}$$

Из (17) и (18) находим

$$h_2 = h_1 \frac{\rho_в}{\rho_ж}, \tag{19}$$

тогда

$$\Delta h = h_1 - h_2 = h_1 \left(1 - \frac{\rho_в}{\rho_ж}\right) = 1.74\,\text{см}. \tag{20}$$

Ответ: 1.74 см.

Критерии оценки

1. Сделан вывод, что искомую величину можно найти как разность изменения уровня воды в двух случаях (16): *3 балла*
2. Записано условие плавания коробочки и найдено изменение уровня воды (17): *2 балла*
3. Найдено изменение уровня воды вследствие опускания коробочки в сосуд так, чтобы она утонула (18): *2 балла*
4. Получен ответ в общем виде (20): *2 балла*
5. Получен правильный численный ответ: *1 балл*

Максимальная оценка *10 баллов*

9 класс

1. Тело, состоящее из куска льда и вмерзшего в него алюминиевого бруска, плавает в воде так, что под водой находится $\alpha = 0,95$ объема тела. Какой процент льда должен растаять, чтобы тело полностью погрузилось в воду? Плотность воды $\rho_в = 10^3\,кг/м^3$, льда $\rho_л = 900\,кг/м^3$, алюминия $\rho_a = 2.7 \cdot 10^3\,кг/м^3$.

<u>Решение</u>
Условие плавания

$$F_{арх} = m_{общ} g. \tag{21}$$

С учетом условия задачи

$$\rho_в g \alpha V_{общ} = (m_{ал} + m_л) g, \tag{22}$$

$$\rho_в \alpha\,(V_л + V_{ал}) = \rho_л V_л + \rho_{ал} V_{ал}. \tag{23}$$

После того, как растаяла часть льда β и тело стало плавать полностью погруженным в воду, получаем

$$\rho_в\,(V_л(1-\beta) + V_{ал}) = \rho_л V_л (1-\beta) + \rho_{ал} V_{ал}. \tag{24}$$

Разделим уравнения (23) и (24) на $V_л$, введем обозначение $\gamma = \dfrac{V_{ал}}{V_л}$, в результате получим систему уравнений с неизвестными γ и β:

$$\begin{cases} \rho_в \alpha\,(1+\gamma) = \rho_л + \rho_{ал}\gamma, \\ \rho_в\,(1-\beta+\gamma) = \rho_л(1-\beta) + \rho_{ал}\gamma. \end{cases} \tag{25}$$

Исключая γ, находим

$$1 - \beta = \frac{\rho_{ал} - \rho_в}{\rho_в - \rho_л} \frac{\alpha\rho_в - \rho_л}{\rho_{ал} - \alpha\rho_в}. \tag{26}$$

Отсюда находим

$$\beta \approx 0.51$$

Ответ: 51%
<u>Критерии оценки</u>
1. Правильно записаны условия плавания с учетом данных задачи (23) и (24): *5 баллов*
2. Решена полученная система уравнений (25): *3 балла*
3. Получен правильный численный ответ: *2 балла*
Максимальная оценка *10 баллов*

2. Некоторое количество воды нагревается электронагревателем мощностью $P = 500$ Вт. При включении нагревателя на время $\tau_1 = 2$ мин температура воды повысилась на $\Delta T = 1$ К, а при его отключении - понизилась за время $\tau_2 = 1$ мин на ту же величину ΔT. Какова масса нагреваемой воды, если потери тепла за счет рассеяния в окружающую среду пропорциональны времени? Удельная теплоемкость воды $c = 4200\,\dfrac{Дж}{кг\,{}^\circ C}$.

<u>Решение</u>
При нагревании воды закон сохранения энергии имеет вид:

$$P\tau_1 = cm\Delta T + G\tau_1, \tag{27}$$

а при остывании –

$$cm\Delta T = G\tau_2. \tag{28}$$

Здесь G – мощность отдачи тепла в окружающую среду. Из уравнений (27) и (28) находим

$$m = \frac{P\tau_1\tau_2}{c\Delta T(\tau_1+\tau_2)} = 4.8\,\text{кг}. \tag{29}$$

Ответ 4.8 кг.

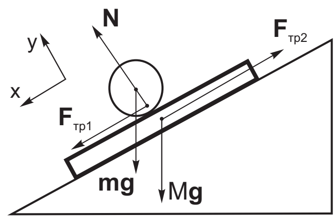
Критерии оценки

1. Правильно записан закон сохранения для нагревании (27): *3 балла*
2. Правильно записан закон сохранения для остывания (28): *3 балла*
2. Решена полученная система уравнений (29): *3 балла*
3. Получен правильный численный ответ: *1 балл*

Максимальная оценка *10 баллов*

3. Доска массой M может двигаться без трения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. С каким ускорением должна бежать по доске собака массой m, чтобы доска не соскальзывала с наклонной плоскости? Каким должен быть коэффициент трения между лапами собаки и доской, чтобы задача имела решение?

Решение



Очевидно, что собака должна бежать по доске вниз. Между лапами собаки и доской будут действовать силы трения, приложенные к собаке и доске как показано на рис. Они связаны между собой третьим законом Ньютона, следовательно: $F_{тр1} = F_{тр2} \equiv F_{тр}$. Тогда второй закон Ньютона для собаки в проекции на ось x

$$ma = F_{тр} + mg\sin\alpha, \tag{30}$$

для доски в проекции на ту же ось

$$0 = -F_{тр} + Mg\sin\alpha. \tag{31}$$

Из уравнений (30) и (31) находим

$$a = g\sin\alpha\frac{M+m}{m}. \tag{32}$$

Максимально возможное значение силы трения $F_{тр} = \mu N$. Запишем для собаки второй закон Ньютона в проекциях на ось y:

$$0 = N - mg\cos\alpha \tag{33}$$

и с учетом (31) получаем

$$\mu \geqslant \frac{M}{m}\operatorname{tg}\alpha. \tag{34}$$

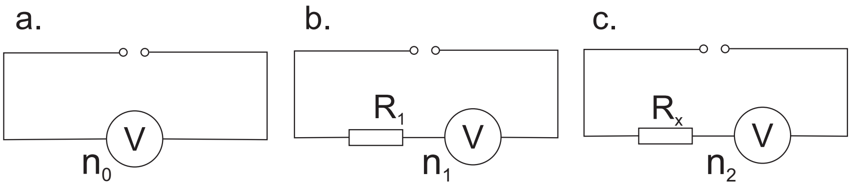
Ответ: $a = g\sin\alpha\dfrac{M+m}{m}$, $\mu \geqslant \dfrac{M}{m}\operatorname{tg}\alpha$.

Критерии оценки

1. Правильно направлены силы трения, действующие на собаку и доску: *2 балла*
2. Правильно записаны уравнения, выражающие второй закон Ньютона для собаки и доски в проекции на ось x (30) и (31): *3 балла*

2. Решена полученная система уравнений и получен ответ на первый вопрос задачи (32): *3 балла*
3. Получен правильный ответ на второй вопрос: *2 балла*
Максимальная оценка *10 баллов*

4. Имеются резисторы, сопротивление одного из них $R_1 = 0.5$ кОм, а другого R_x нужно измерить. Для этого, использовав источник постоянного электрического напряжения, собрали три цепи (см. рис. a, b, c). В первом случае стрелка вольтметра отклонилась на $n_0 = 16$ делений его шкалы, во втором – на $n_1 = 12$ делений и в третьем – на $n_2 = 10$ делений. Определите по этим данным сопротивление R_x второго резистора.



Решение
Обозначим цену деления вольтметра α, показания вольтметра в первом случае $U_0 = \alpha n_0$ равны напряжению источника. Во втором случае: показания вольтметра $U_1 = \alpha n_1$, напряжение на резисторе R_1 равно $U_{R_1} = U_0 - U_1 = \alpha(n_0 - n_1)$. При последовательном соединении сила тока одинакова:

$$\frac{\alpha n_1}{R_v} = \frac{\alpha(n_0 - n_1)}{R_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{R_v} = \frac{(n_0 - n_1)}{R_1}, \tag{35}$$

здесь R_v – сопротивление вольтметра.

Для третьего случая аналогично получаем

$$\frac{\alpha n_2}{R_v} = \frac{\alpha(n_0 - n_2)}{R_x} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{R_v} = \frac{(n_0 - n_2)}{R_x}. \tag{36}$$

Решая совместно уравнения (35) и (36), находим

$$R_x = \frac{n_1(n_0 - n_2)}{n_2(n_0 - n_1)} R_1 = 0.9\,\text{кОм}. \tag{37}$$

Ответ: 0.9 кОм.
Критерии оценки
1. Записаны показания вольтметра через цену деления и выражено напряжение на клеммах источника: *2 балла*
2. Правильно записан закон Ома и равенство токов для второго случая (35): *2 балла*
3. Правильно записан закон Ома и равенство токов для третьего случая (36): *2 балла*
4. Решена полученная система уравнений и записан ответ в общем виде (37): *3 балла*
5. Получен правильный численный ответ: *1 балл*
Максимальная оценка *10 баллов*

5. Перед переездом на абсолютно пустой дороге стоит автомобиль. На светофоре указано, что переезд откроется через τ секунд. Водителю необходимо попасть в точку за переездом, расстояние до которой от автомобиля равно S, за минимальное время. Считать, что автомобиль может двигаться только с постоянным по модулю ускорением

a как вперед так и назад, при разгоне и торможении. Определить минимальное время, за которое автомобиль может добраться до нужной точки.

Решение

Водитель может поступить следующим образом.

1-й вариант. Дождаться открытия переезда и двигаясь с ускорением a достигнуть требуемой точки. Для этого необходимо время

$$t_I = \tau + \sqrt{\frac{2s}{a}}. \tag{38}$$

2-й вариант. Водитель может использовать другую стратегию: к моменту открытия переезда необходимо приобрести максимально возможную скорость. Для этого необходимо за то время, пока закрыт переезд (τ): начать двигаться назад с ускорением a, далее тормозить с тем же ускорением, на мгновение остановиться и начать движение с ускорением a в сторону переезда так, чтобы оказаться у переезда к моменту его открытия. Очевидно, что при движении назад время разгона (t_0) будет равно времени торможения (t_0), тогда расстояние, на которое автомобиль отъедет от переезда

$$s_0 = \frac{at_0^2}{2} + \frac{at_0^2}{2} = at_0^2.$$

Тогда автомобиль должен будет за время $\tau - 2t_0$ вернуться к переезду

$$s_0 = \frac{a(\tau - 2t_0)^2}{2}.$$

Приравнивая выражения для s_0, находим

$$t_0 = \frac{\tau}{2+\sqrt{2}}. \tag{39}$$

Кроме того, начиная движение из точки остановки, автомобиль двигаясь без начальной скорости должен будет пройти расстояние $s_0 + s$, затратив на это время t_x:

$$s_0 + s = \frac{at_x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_x = \sqrt{\frac{2(s_0+s)}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{a} + 2t_0^2}.$$

Отсюда полное время для второго случая

$$t_{II} = 2t_0 + t_x = 2t_0 + \sqrt{\frac{2s}{a} + 2t_0^2}. \tag{40}$$

Здесь t_0 дается выражением (39). Очевидно, что вторая стратегия потребует меньше времени, т.е. $t_{II} < t_I$.

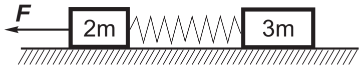
Ответ: $2t_0 + \sqrt{\frac{2s}{a} + 2t_0^2}$, где $t_0 = \frac{\tau}{2+\sqrt{2}}$.

Критерии оценки

1. Правильно найдено время движения в первом случае (38): *1 балл*
2. Правильно описана стратегия для второго случая: *3 балла*
3. Правильно найдено время движения во втором случае (40), (39) : *4 балла*
4. Сделан вывод о том, что время во втором случае меньше: *2 балла*

Максимальная оценка *10 баллов*

10 класс



1. На горизонтальной плоскости лежат два бруска массами $3m$ и $2m$, соединённые ненапряженной пружиной (см. рис.). Какую наименьшую постоянную силу, направленную горизонтально, нужно приложить к бруску массой $2m$, чтобы сдвинулся и другой брусок? Коэффициент трения брусков о плоскость μ.

Решение

Пусть брусок массой $3m$ остается неподвижным, брусок массой $2m$ смещается на x и останавливается. В этом случае сила F совершает работу по растяжению пружины и против сил трения:

$$Fx = \frac{kx^2}{2} + \mu 2mgx, \tag{41}$$

отсюда

$$F = \frac{kx}{2} + 2\mu mg. \tag{42}$$

Условие начала скольжения бруска $3m$

$$kx = \mu 3mg. \tag{43}$$

Из (42) и (43) получаем

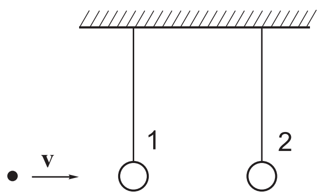
$$F_{min} = \frac{3\mu mg}{2} + 2\mu mg = \frac{7}{2}\mu mg. \tag{44}$$

Ответ: $\frac{7}{2}\mu mg$.

Критерии оценки

1. Правильно записан закон сохранения энергии для бруска $2m$ (41): *4 балла*
2. Правильно записан II закон Ньютона для бруска $3m$ (43): *3 балла*
3. Получен правильный ответ (44): *3 балла*

Максимальная оценка *10 баллов*



2. Пуля пробивает один из подвешенных грузиков и застревает в другом (см.рис.). Начальная скорость пули v, масса пули m равна массе каждого грузика. Найдите количество теплоты, выделившееся в первом грузике, если во втором выделилось количество теплоты Q.

Решение

Для попадания пули в первый грузик закон сохранения импульса

$$mv = mv_1 + mu, \tag{45}$$

закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + Q'. \tag{46}$$

Здесь v_1 - скорость пули после пробивания грузика, u - скорость первого грузика. Для попадания пули во второй грузик закон сохранения импульса

$$mv_1 = 2mu_1, \tag{47}$$

закон сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{2mu_1^2}{2} + Q. \tag{48}$$

Из (47) и (48) находим

$$Q = \frac{mv_1^2}{4}. \tag{49}$$

Далее решаем (45) и (45) с учетом (49). В результате получаем

$$Q' = 2v\sqrt{mQ} - 4Q. \tag{50}$$

Ответ:$2v\sqrt{mQ} - 4Q$.

Критерии оценки

1. За правильную запись каждого из уравнений (45) - (49): *1 балл*

2. Получен правильный ответ (50): *5 баллов*

Максимальная оценка *10 баллов*

3. Некоторое количество воды нагревается электронагревателем мощностью $P =$ 500 Вт. При включении нагревателя на время $\tau_1 = 2$ мин температура воды повысилась на $\Delta T = 1$ К, а при его отключении - понизилась за время $\tau_2 = 1$ мин на ту же величину ΔT. Какова масса нагреваемой воды, если потери тепла за счет рассеяния в окружающую среду пропорциональны времени? Удельная теплоемкость воды $c =$ 4200 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\,{}^\circ C}$. Решение

При нагревании воды закон сохранения энергии имеет вид:

$$P\tau_1 = cm\Delta T + G\tau_1, \tag{51}$$

а при остывании –

$$cm\Delta T = G\tau_2. \tag{52}$$

Здесь G – мощность отдачи тепла в окружающую среду. Из уравнений (7) и (8) находим

$$m = \frac{P\tau_1\tau_2}{c\Delta T(\tau_1 + \tau_2)} = 4.8\,\text{кг}. \tag{53}$$

Ответ 4.8 кг.

Критерии оценки

1. Правильно записан закон сохранения для нагревании (51): *3 балла*

2. Правильно записан закон сохранения для остывания (52): *3 балла*

2. Решена полученная система уравнений (53): *3 балла*

3. Получен правильный численный ответ: *1 балл*

Максимальная оценка *10 баллов*

4. Перед переездом на абсолютно пустой дороге стоит автомобиль. На светофоре указано, что переезд откроется через τ секунд. Водителю необходимо попасть в точку за переездом, расстояние до которой от автомобиля равно S, за минимальное время. Считать, что автомобиль может двигаться с постоянным по модулю ускорением a как вперед так и назад, кроме того, может резко, практически мгновенно затормозить (дорога сухая, автомобиль исправен). Определить минимальное время, за которое автомобиль может добраться до нужной точки.

Решение

Водитель может поступить следующим образом.

1-й вариант. Дождаться открытия переезда и двигаясь с ускорением a достигнуть требуемой точки. Для этого необходимо время

$$t_I = \tau + \sqrt{\frac{2s}{a}}. \tag{54}$$

2-й вариант. Водитель может использовать другую стратегию: к моменту открытия переезда необходимо приобрести максимально возможную скорость. Для этого необходимо за то время, пока закрыт переезд (τ): начать двигаться назад с ускорением a, резко затормозить, далее начать движение с ускорением a в сторону переезда так, чтобы оказаться у переезда к моменту его открытия. Очевидно, что время движения назад будет равно времени приближения к светофору и равно $tau/2$. Тогда расстояние, на которое автомобиль отъедет от переезда

$$s_0 = \frac{a\tau^2}{8}, \tag{55}$$

скорость автомобиля непосредственно перед открытием светофора

$$v_0 = a\tau/2, \tag{56}$$

закон движения автомобиля с момента открытия светофора

$$x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{57}$$

Время движения находится из уравнения $x(t) = s$ и равно

$$t = -\frac{v_0}{a} + \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} + \frac{2s}{a}}. \tag{58}$$

Тогда время движения во втором случае

$$t_{II} = t + \tau = \frac{\tau}{2} + \sqrt{\frac{\tau^2}{4} + \frac{2s}{a}} \tag{59}$$

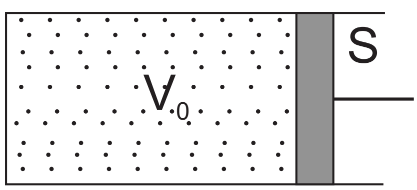
Очевидно, что вторая стратегия потребует меньше времени, т.е. $t_{II} < t_I$.

Ответ: $\frac{\tau}{2} + \sqrt{\frac{\tau^2}{4} + \frac{2s}{a}}$

Критерии оценки

1. Правильно найдено время движения в первом случае (54): *1 балл*
2. Правильно описана стратегия для второго случая: *3 балла*
3. Правильно найдено время движения во втором случае (58), (59) : *4 балла*
4. Сделан вывод о том, что время во втором случае меньше: *2 балла*

Максимальная оценка *10 баллов*



5. Идеальный одноатомный газ заполняет открытый цилиндрический сосуд с поршнем, который может двигаться практически без трения. Стенки сосуда и поршень теплоизолированы. Система находится в равновесии, площадь основания цилиндра $S = 200\,\text{см}^2$, начальный объем $V_0 = 3.0\,\text{л}$. Атмосферное давление $p_0 = 10^5\,\text{Па}$. Если в

такой системе надавить или потянуть за поршень, то можно ощутить некоторые “упругие” силы. Покажите, что при малых деформациях для системы выполняется закон Гука и найдите жесткость системы при малых деформациях.

Решение

Поскольку сосуд открыт, поршень может двигаться без трения, то при равновесии давление газа равно атмосферному. Сдвинем поршень на бесконечно малую величину $Deltax$, тогда объем газа станет равным $V_0+S\Delta x$, давление газа будет p_1. Под “упругой” силой будем понимать разность сил давления газа и атмосферы на поршень:

$$F_{\text{упр}} = p_1 S - p_0 S. \tag{60}$$

Процесс будет адиабатическим, следовательно первое начало термодинамики дает

$$0 = A + \Delta U \;\Rightarrow\; p_0 S\Delta x = -\frac{3}{2}\nu R\Delta T, \tag{61}$$

уравнения состояния:

$$p_0V_0 = \nu RT_0, \quad p_1(V_0 = S\Delta x) = \nu R(T + \Delta T). \tag{62}$$

Из (61) и (62) находим

$$p_1 = \frac{\nu RT + \nu R\Delta T}{V_0 + S\Delta x} = \frac{p_0V_0 - \dfrac{2}{3}p_0 S\Delta x}{V_0\left(1 + \dfrac{S\Delta x}{V_0}\right)} \approx p_0\left(1 - \frac{2S\Delta x}{3V_0}\right)\left(1 - \frac{S\Delta x}{V_0}\right). \tag{63}$$

С учетом малости $Deltax$ и оставляя только слагаемые первого порядка малости получаем

$$p_1 = p_0\left(1 - \frac{5}{3}\frac{S\Delta x}{V_0}\right). \tag{64}$$

В результате

$$F_{\text{упр}} = -\frac{5}{3}\frac{p_0S^2}{V_0}\Delta x \tag{65}$$

и

$$k = \frac{5}{3}\frac{p_0S^2}{V_0} = 22.4\,\frac{\text{кН}}{\text{м}}. \tag{66}$$

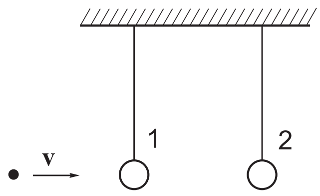
Ответ: $\dfrac{5}{3}\dfrac{p_0S^2}{V_0} = 22.4\,\dfrac{\text{кН}}{\text{м}}$

Критерии оценки

1. Записаны первое начало и уравнения состояния (61), (62): *4 балла*
2. Получено выражение для давления газа при малом смещении поршня (64): *3 балла*
3. Получен ответ (66) : *3 балла*

Максимальная оценка *10 баллов*

11 класс



1. Пуля пробивает один из подвешенных грузиков и застревает в другом (см.рис.). Начальная скорость пули v, масса пули m равна массе каждого грузика. Найдите количество теплоты, выделившееся в первом грузике, если во втором выделилось количество теплоты Q.

Решение

Для попадания пули в первый грузик закон сохранения импульса

$$mv = mv_1 + mu, \tag{67}$$

закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + Q'. \tag{68}$$

Здесь v_1 - скорость пули после пробивания грузика, u - скорость первого грузика. Для попадания пули во второй грузик закон сохранения импульса

$$mv_1 = 2mu_1, \tag{69}$$

закон сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{2mu_1^2}{2} + Q. \tag{70}$$

Из (47) и (70) находим

$$Q = \frac{mv_1^2}{4}. \tag{71}$$

Далее решаем (67) и (67) с учетом (71). В результате получаем

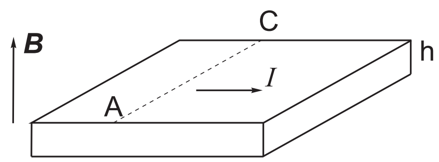
$$Q' = 2v\sqrt{mQ} - 4Q. \tag{72}$$

Ответ:$2v\sqrt{mQ} - 4Q$.

Критерии оценки

1. За правильную запись каждого из уравнений (67) - (71): *1 балл*
2. Получен правильный ответ (72): *5 баллов*

Максимальная оценка *10 баллов*



2. По металлической ленте, толщина которой h, течет ток I (см. рис.). Лента помещена в однородное магнитное поле, индукция которого равна $\mathbf{B}$ и направлена перпендикулярно поверхности ленты. Определите разность потенциалов между точками A и C ленты, если концентрация свободных электронов в металле равна n.

Решение

На свободные заряды в ленте будут действовать сила Лоренца и электрическая сила, которые будут уравновешивать друг друга

$$eE = evB. \tag{73}$$

Отсюда получаем

$$E = vB. \tag{74}$$

Ток, текущий по ленте по определению

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{nev\Delta t S}{\Delta t} = nevdh, \tag{75}$$

где d - ширина ленты. Тогда

$$v = \frac{I}{nedh}. \tag{76}$$

Тогда с учетом (74) получаем

$$E = \frac{BI}{nedh} \quad \Rightarrow \quad U = Ed = \frac{BI}{neh}. \tag{77}$$

Ответ: $\dfrac{BI}{neh}$

Критерии оценки

1. Найдена напряженность электрического поля (74): *3 балла*
2. Правильно записано выражение для тока (75): *3 балла*
3. Получен правильный ответ: *4 балла*

Максимальная оценка *10 баллов*

3. Шарик массой 0.2 кг, подвешенный на нити, совершает гармонические колебания. Во сколько раз увеличится частота колебаний, если шарику сообщить заряд 100 мкКл и поместить в однородное электрическое поле напряженностью 160 кВ/м, направленное вертикально вниз? Ускорение свободного падения 10 м/с^2 .

Решение

В силу однородности электрического поля для шарика можно заменить действие силы тяжести и электрического поля на действие только поля тяжести с другим “эффективным” $g_{эф}$:

$$mg + qE = mg_{эф} \quad \Rightarrow \quad g_{эф} = g + \frac{qE}{m}. \tag{78}$$

Тогда

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g_{эф}}{l}}, \tag{79}$$

отсюда

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{g_{эф}}{g}} = \sqrt{1 + \frac{qE}{mg}} = 3. \tag{80}$$

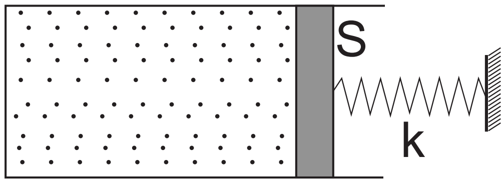
Ответ: 3

Критерии оценки

1. Найдено выражение для $g_{эф}$ (78): *4 балла*
2. Правильно записано выражение частот колебаний (79): *3 балла*
3. Получен правильный ответ (80): *3 балла*

Максимальная оценка *10 баллов*

4. Идеальный одноатомный газ заполняет цилиндрический сосуд с поршнем, который может двигаться практически без трения. Стенки сосуда и поршень теплоизолированы. Система находится в равновесии, площадь основания цилиндра $S = 200\,\text{см}^2$, начальный объем $V_0 = 3.0\,\text{л}$, температура $t_0 = 20\ ^\circ C$. Поршень соединен с недеформированной пружиной (см. рис.), другой конец которой закреплен, жесткость пружины $k = 15$ кН/м. Газ медленно нагревают до температуры $t_1 = 80\ ^\circ C$, удерживая поршень на месте. Затем поршень резко отпускают. Пренебрегая массой поршня, найдите температуру газа после того, как система придет в равновесие. Атмосферное давление $p_0 = 10^5\,\text{Па}$.



Решение

Газ сначала изохороно нагревают, в результате давление в сосуде становится равным

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0}. \tag{81}$$

Запишем уравнения состояния

$$p_0 V_0 = \nu R T_0, \tag{82}$$

$$p_1 V_0 = \nu R T_1. \tag{83}$$

После отпускания поршня начинается неравновесный процесс. Для него можно записать первое начало термодинамики, полагая, что работа газа идет на увеличение потенциальной энергии пружины

$$0 = A + \Delta U \Rightarrow 0 = \frac{k\Delta x^2}{2} + \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1). \tag{84}$$

Далее из (81) - (84) получаем квадратное уравнение относительно Δx

$$4k\Delta x^2 + \Delta x 3\left(p_0 S + \frac{kV_0}{S}\right) - 3p_0 V_0\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right) = 0. \tag{85}$$

Решая (85) находим $\Delta x \approx 1.36$ см. Из (84) с учетом (82)

$$T_2 = T_1 - T_0 \frac{k\Delta x^2}{3P_0 V_0} = 352.1\,\text{K} = 79.1\,^\circ\text{C}. \tag{86}$$

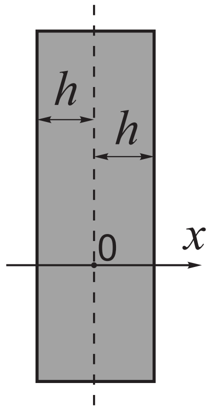
Ответ: $352.1\,\text{K} = 79.1\,^\circ\text{C}$

Критерии оценки

1. Записано уравнение изохорного процесса и уравнения состояния (81) - (83) : *3 балла*
2. Записано первое начало термодинамики (84): *2 балла*
3. Получено квадратное уравнение и найдено Δx (85): *3 балла*
4. Найдено T_2 (86): *2 балла*

Максимальная оценка *10 баллов*

5. Пластина толщиной $2h$ заряжена с постоянной объёмной плотностью заряда ρ. Поперечные размеры пластины значительно больше ее толщины, поэтому граничными эффектами можно пренебречь. Ось Ox направлена перпендикулярно пластине, начало отсчёта находится в центре пластины.



а) Найдите зависимость проекции вектора напряженности электрического поля E_x на ось Ox от координаты x в диапазоне $-2h \leqslant x \leqslant 2h$, постройте график. Считайте заряд пластины отрицательным.
б) Найдите зависимость потенциала электростатического поля от координаты x в диапазоне $-2h \leqslant x \leqslant 2h$, постройте график. Потенциал в центре пластины принять равным нулю: $\varphi(0) = 0$.
Прим. Объемной плотностью электрического заряда называется отношение заряда элемента объема к величине этого элемента объема: $\rho = \dfrac{\Delta q}{\Delta V}$.

<u>Решение</u>

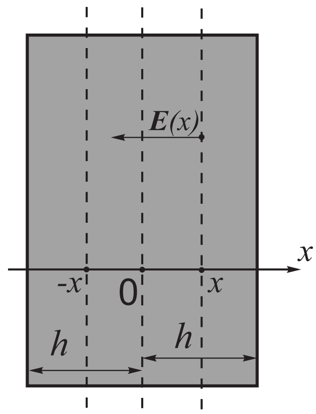
Напряженность поля бесконечно большой пластины с поверхностной плотностью заряда σ

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{87}$$

Для пластины конечной толщины l, объемная плотность заряда ρ можно показать, что $\sigma = \rho l$ и

$$E = \frac{\rho l}{2\varepsilon_0} \tag{88}$$

Возьмем точку на расстоянии x от оси симметрии пластины (см. рис.). Поле в этой точке будет создаваться зарядами, находящимися в слое от $-x$ до x. Поля, которые в данной точке будут создаваться остальными зарядами, будут компенсировать друг друга. Таким образом,

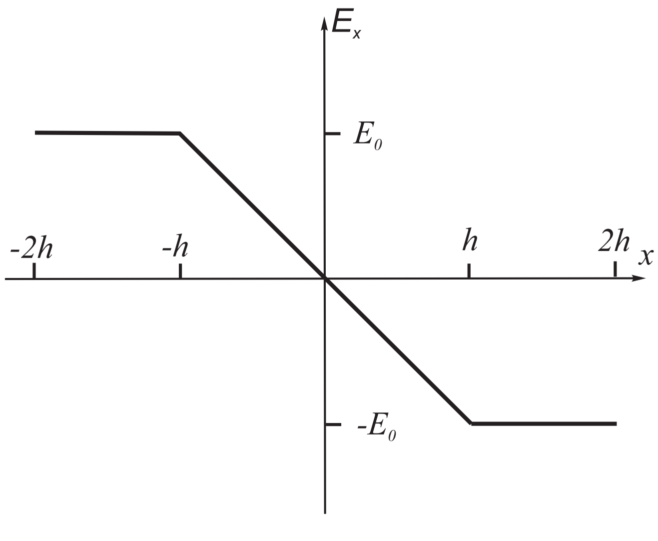


$$E = \frac{\rho 2x}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}, \quad \text{при} \quad |x| \leqslant h. \tag{89}$$

При $|x| > h$ получаем

$$E_0 = \frac{\rho 2h}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}. \tag{90}$$

Построим график напряженности, с учетом $\rho < 0$:



Для нахождения потенциала запишем

$$\Delta\varphi = -E_x \Delta x. \tag{91}$$

Поскольку напряженность изменяется, то изменение потенциала будет численно равно площади под графиком $E_x(x)$:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}E_x(x)x = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} \tag{92}$$

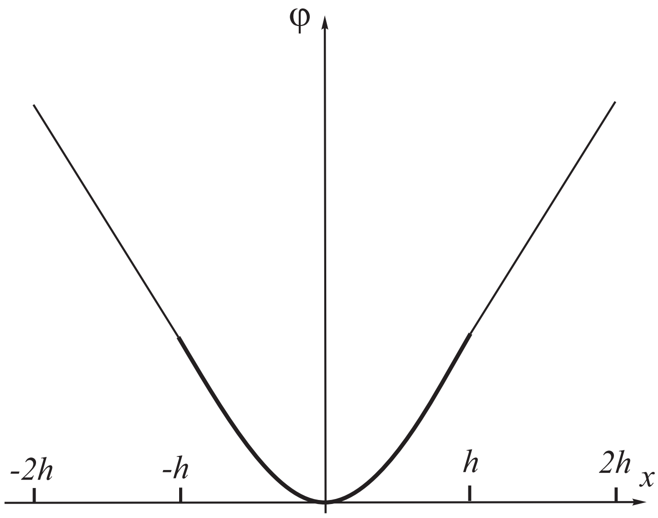
Полученный ответ справедлив при $x \leqslant h$. При $x > h$ напряженность поля постоянна, поэтому

$$\varphi(x) - \varphi(h) = -E_0(x - h), \tag{93}$$

тогда с учетом (90) получаем

$$\varphi(x) = \frac{\rho h}{2\varepsilon_0}(h - 2x). \tag{94}$$

График строим с учетом $\rho < 0$:



Критерии оценки

1. Получены выражения для напряженности внутри и вне пластины: *3 балла*
2. Построен график напряженности: *2 балла*
3. Получены выражения для потенциала внутри и вне пластины: *3 балла*
4. Построен график потенциала: *2 балла*

Максимальная оценка *10 баллов*