

Модуляция и кодирование

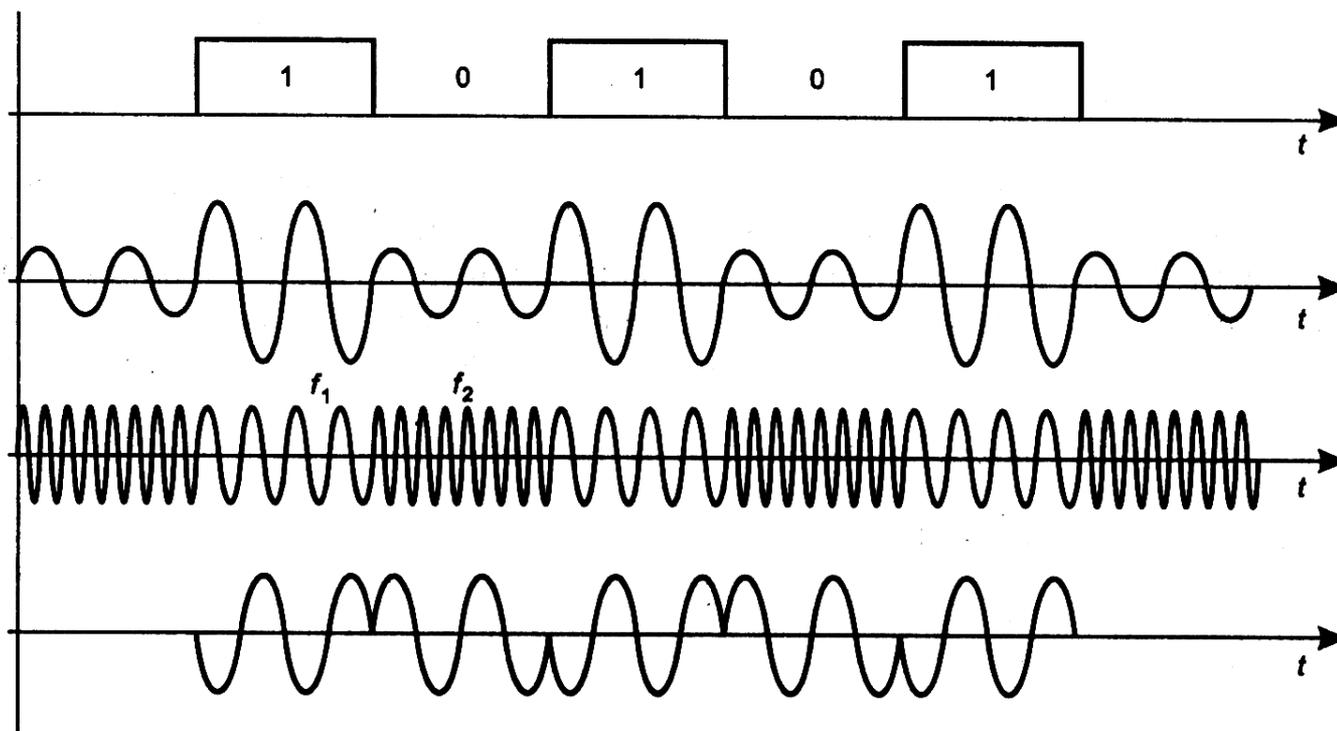
- Принципы и используемые виды модуляции, их особенности
- Комплексное представление модулированного сигнала
- I/Q модулятор

Принципы и используемые виды модуляции

- Модуляция выполняется на 1-ом уровне модели OSI оборудованием АКД (DCE)
- Задача – преобразовать несущий информацию сигнал в форму необходимую для передачи через среду
- На практике обычно используется т.н. несущий синусоидальный сигнал, параметры которого изменяют в соответствии с передаваемой информацией
- Информация поступает в виде цифровой последовательности от ООД (DTE)

Виды модуляции

$$a(t) = A(t) \cos(\omega_c t + \phi(t))$$



BPSK модуляция

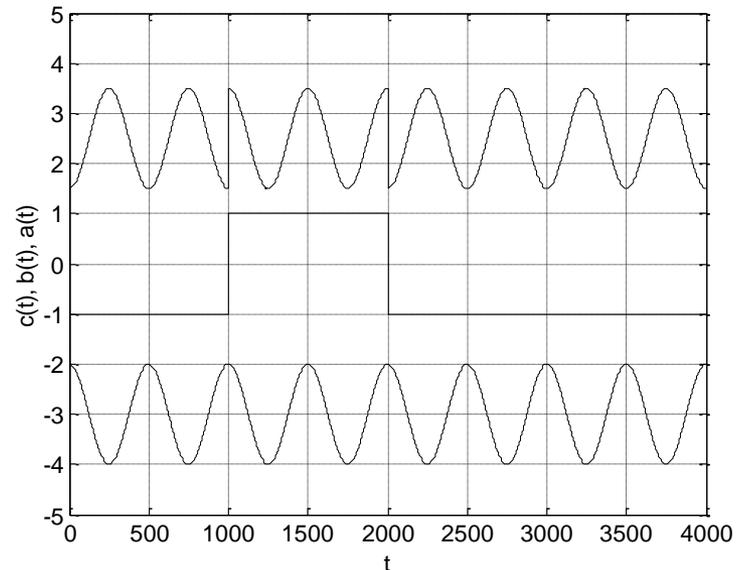
- BPSK - одна из простейших схем, в которой символ «0» передается несущей с фазовым сдвигом 180, а «1» - несущей без сдвига фазы

На рисунке:

$a(t)$ – фазо-модулированный сигнал

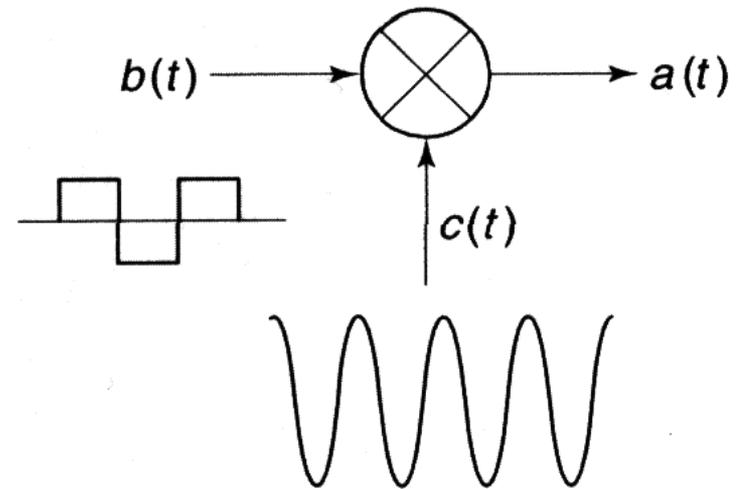
$b(t)$ – модулирующий сигнал, т.н. видео-сигнал (англ. - baseband)

$c(t)$ – несущее колебание

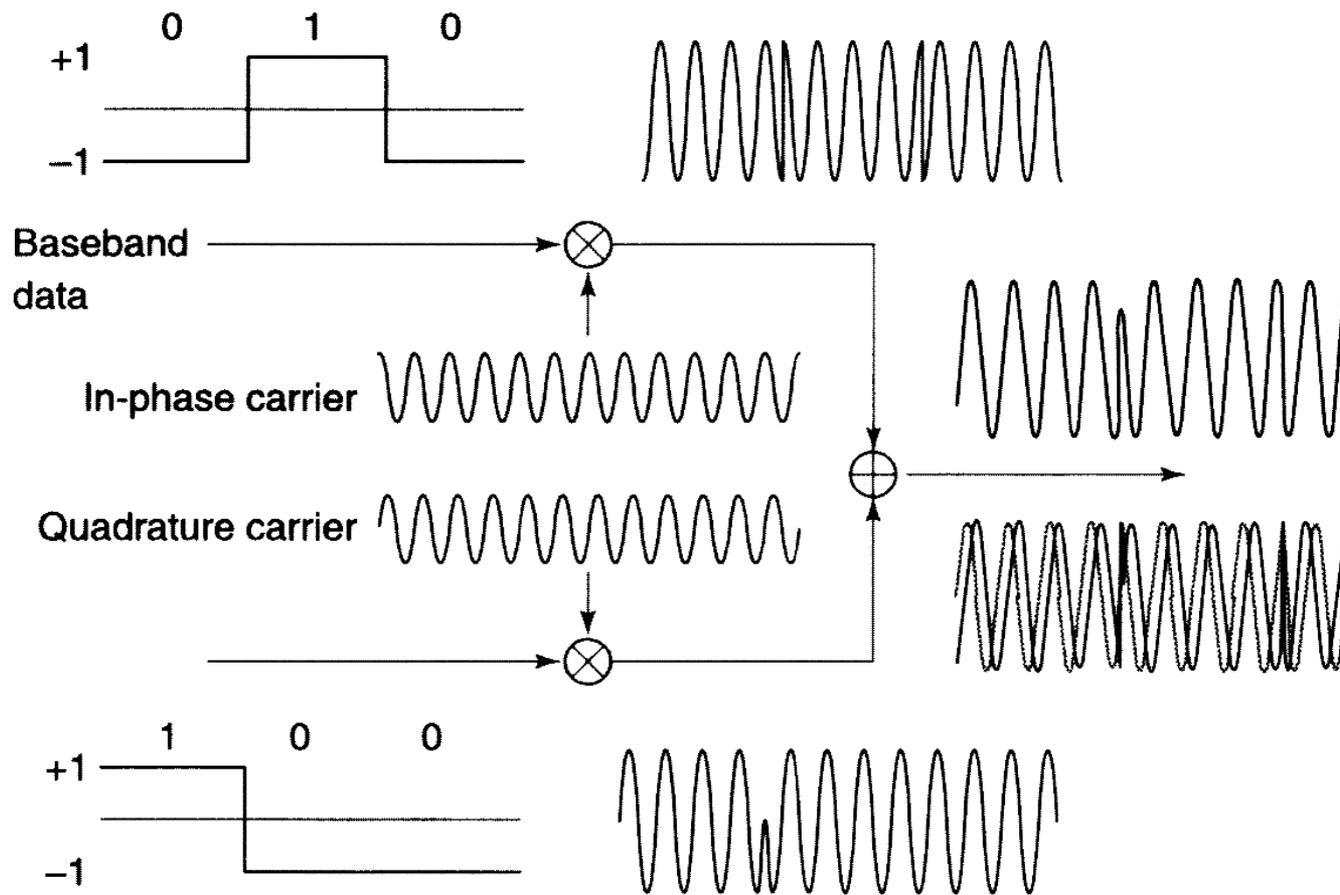


BPSK модулятор

- BPSK модулятор (см. рис.) способен изменять фазу несущей только на 0 и 180 градусов
- Нужна более общая модель и реализация модулятора
- Можно добавить к исходному модулятору аналогичный т.н. квадратурный блок, который будет модулировать квадратурную версию несущей (+90 град.) независимым модулирующим сигналом
- Полученный (In-phase/Quadrature-phase, I/Q) модулятор сможет изменять и фазу и амплитуду несущей



I/Q модулятор



Комплексное представление модулированного сигнала

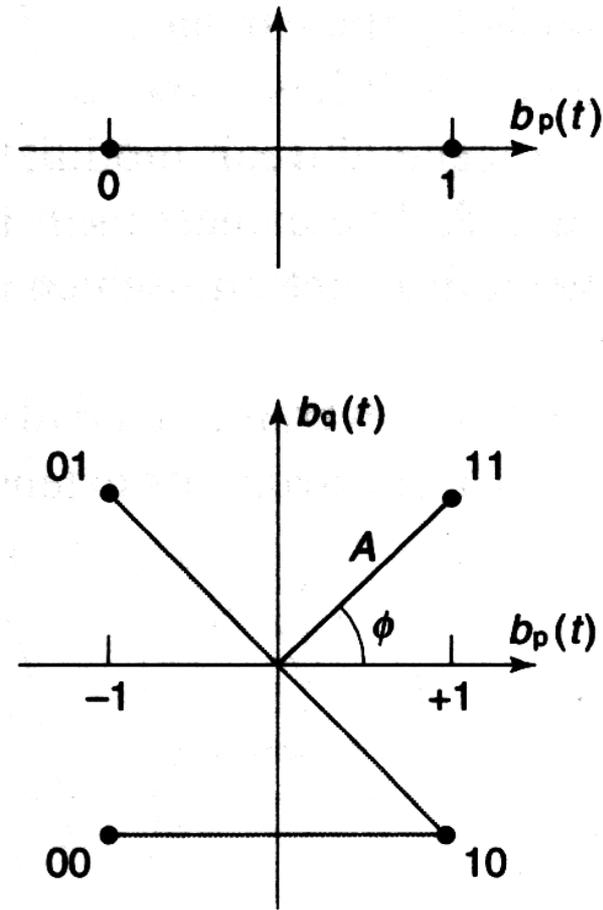
$$a(t) = A(t) \cos[\omega_c t + \phi(t)] = A(t)[\cos \phi(t) \cos \omega_c t - \sin \phi(t) \sin \omega_c t] = \\ = b_p(t) \cos \omega_c t - b_q(t) \sin \omega_c t, \text{ где } b_p = A(t) \cos \phi(t) \text{ и } b_q = A(t) \sin \phi(t)$$

- модулирующий сигнал $b(t)$ представлен синфазной составляющей $b_p(t)$ и квадратурной составляющей $b_q(t)$
- докажите, что представление сигнала ниже соответствует представлению данному выше.

$$a(t) = \operatorname{Re}[b(t) \exp(j\omega_c t)] \quad b(t) = b_p(t) + jb_q(t)$$

Созвездия

- Для отображения всех возможных состояний амплитуды и фазы модулированного сигнала используют представление на плоскости – т.н. «созвездие». На рисунках: BPSK, QPSK.



Комплексное представление шума

- Для дальнейшего рассмотрения систем передачи данных, удобно представить шум (после фильтра приемника с полосой W) аналогично модулированному сигналу, т.е. с несущей, случайным образом модулированной по амплитуде и фазе:

$$n(t) = A(t) \cos(\omega_c t + \phi) = n_p(t) \cos \omega_c t - n_q(t) \sin \omega_c t$$

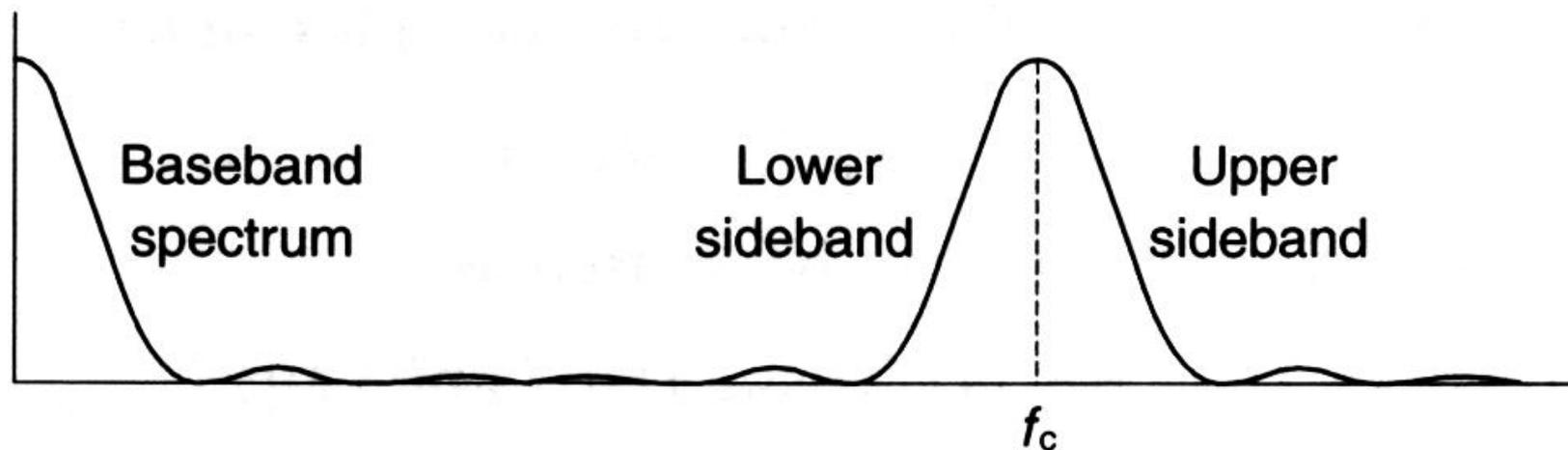
- Наиболее часто используемая модель шума – аддитивный гауссовский шум (AWGN) с плотностью вероятности:

$$p(n) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Можно показать, что n_p и n_q статистически независимы и распределены по Гауссу с одинаковой дисперсией:

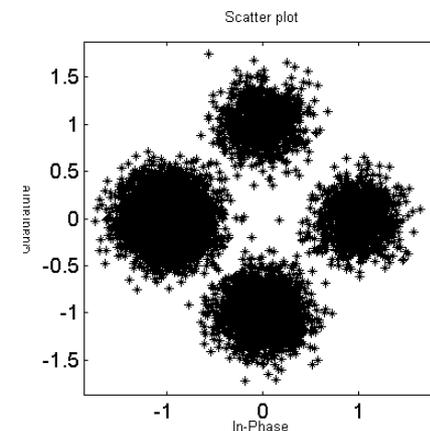
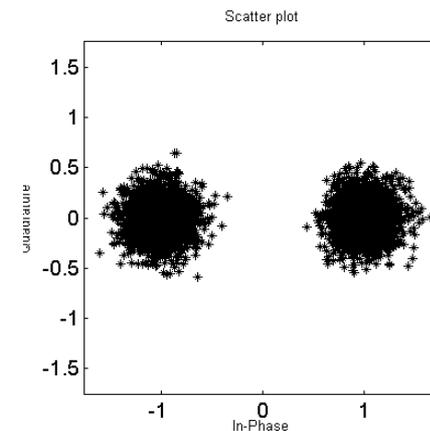
$$\sigma^2 = \overline{n_p^2} = \overline{n_q^2} = P_n$$

Спектр модулированного сигнала



Зашумленные MPSK сигналы

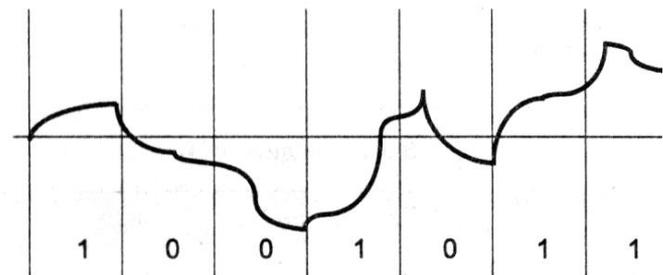
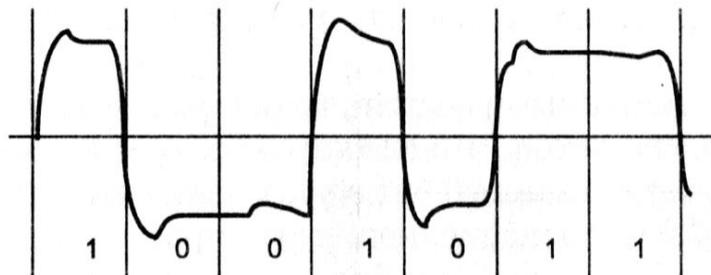
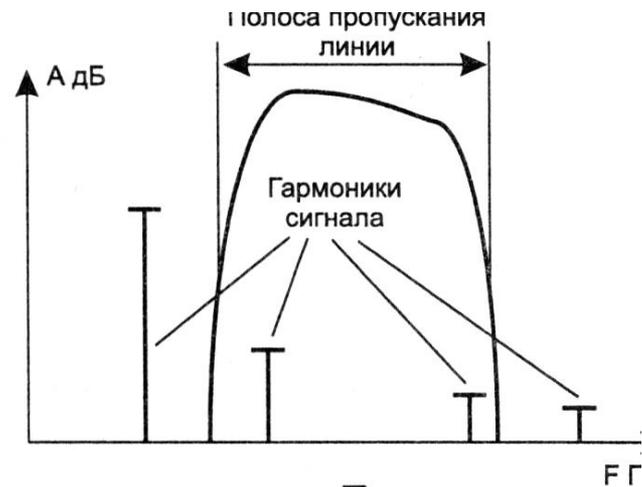
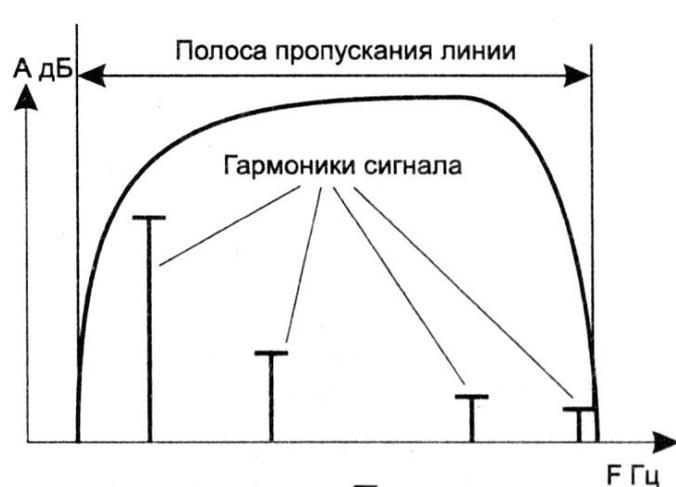
- На рисунках представлены созвездия для зашумленных BPSK и MPSK ($M=4$).



Реализация систем передачи дискретных сообщений

- Среды
- Согласованная фильтрация и фильтрация по Найквисту
- Полная система передачи данных
- Вероятности символьной и битовой ошибки для модуляционных схем
- Синхронизация элементов сети

Полоса пропускания линии и спектр модулированного сигнала



Межсимвольные помехи (ISI)

- Частотные ограничения модулированного и, следовательно, модулирующего сигнала, приводят к размыванию символов во времени.
- Теорема о неопределенности.
- Межсимвольные помехи (англ. Inter-Symbol Interference, ISI), вызываемые временным размыванием, можно устранить выбором фильтра ограничивающего частотную полосу.

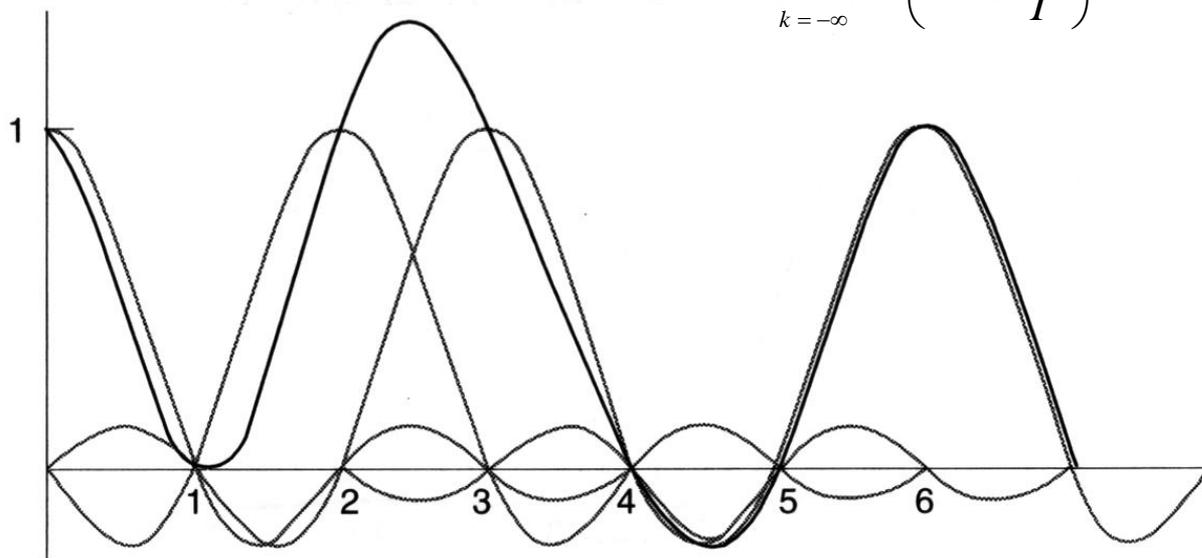
Фильтрация по Найквисту

- Временной критерий Найквиста:

$$g(iT) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

- Частотный критерий Найквиста:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(f + \frac{k}{T}\right) = T, \quad |f| \leq \frac{1}{2T}$$



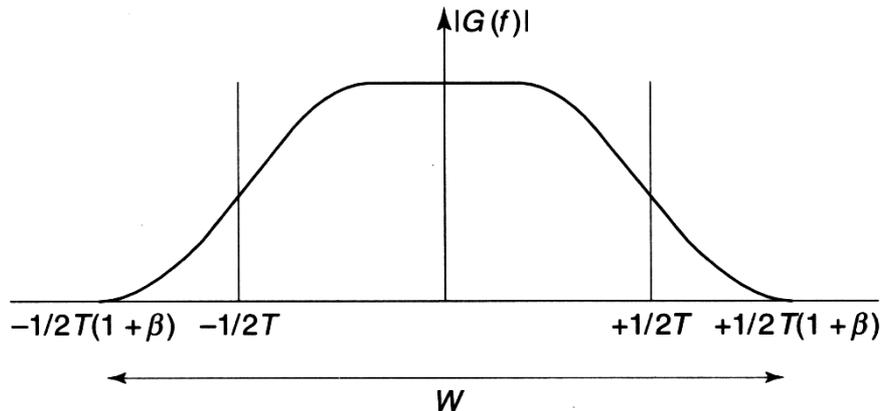
Фильтрация по Найквисту (продолжение)

- Для простоты реализации, в качестве ФН применяют т.н. фильтр «с приподнятым косинусом» (англ. *raised cosine*), имеющий полосу пропускания, полосу задержки и спад между ними по $1 + \cos(f)$ (отсюда название).

$$\begin{cases} 1 & , \quad |f| \leq \frac{1}{2T}(1 - \beta) \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sin \left[\frac{\pi T}{\beta} \left(|f| - \frac{1}{2T} \right) \right] \right\} & , \quad \frac{1}{2T}(1 - \beta) < |f| < \frac{1}{2T}(1 + \beta) \\ 0 & , \quad |f| \geq \frac{1}{2T}(1 + \beta) \end{cases}$$

Фильтрация по Найквисту (продолжение)

- Коэффициент β в диапазоне $0..1$ определяет крутизну перехода от полосы пропускания к полосе задержки. Для телефонных модемов обычно $\beta = 0.75$



- Занимаемая сигналом полоса определяется β и r_b :

$$W = \frac{(1 + \beta)}{T} = r_s (1 + \beta)$$

Согласованная фильтрация

- Для верного обнаружения переданного символа, на приемной стороне необходимо максимизировать отношение сигнал/шум для моментов измерения параметров сигнала $t = i \cdot T$ (используем равенство Парсеваля)
- Для решения этой задачи, входной сигнал обрабатывается фильтром с частотной характеристикой $H(\omega)$ такой, что:

$$\frac{s^2(T)}{\bar{n}^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)H(f) \exp(2\pi jT)|^2 df}{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} N_0 |H(f)|^2 df} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f) \exp(2\pi jT)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} N_0 |H(f)|^2 df}$$

- Здесь используется неравенство Коши-Шварца, которое в нашем случае становится равенством при условии:

$$H(f) = G^*(f) \exp(2\pi jT) \Rightarrow |H(f)| = |G(f)|$$

Согласованный фильтр (СФ)

- Фильтр с частотной характеристикой, совпадающей (согласованной) со спектром входного сигнала называется СФ. Отношение сигнал/шум на выходе СФ:

$$\frac{s^2(T)}{\bar{n}^2} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f) \exp(2\pi jTf)|^2 df}{\frac{1}{2} N_0} = \frac{2E}{N_0}$$

- Импульсная характеристика СФ обратна по времени импульсу сигнала:

$$h(t) = g(T - t)$$

Полная система передачи

- Система передачи данных, состоящая из приемника, передатчика и линии связи, должна в целом удовлетворять обоим критериям: Найквиста и согласованной фильтрации
- Обозначая частотные характеристики передатчика и приемника $T(f)$, $R(f)$, и используя фильтр «с приподнятым косинусом», получим $T(f)$ и $R(f)$:

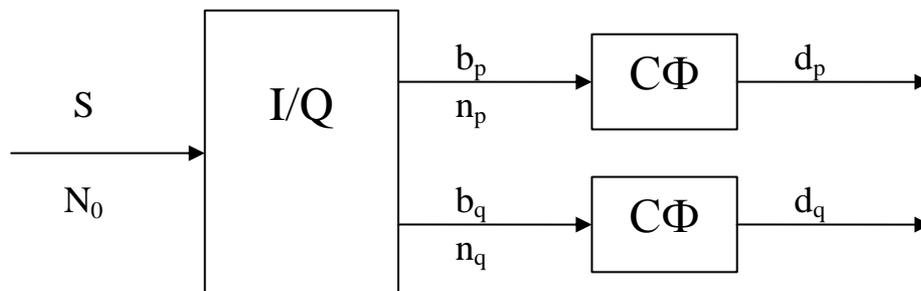
$$\begin{cases} T(f)R(f) = RC(f) & \text{Критерий Найквиста} \\ T(f) = R^*(f) & \text{СФ} \end{cases} \Rightarrow |R(f)| = |T(f)| = \sqrt{|RC(f)|}$$

- Полная мощность принятого шума при использовании такого фильтра для $r_b = 1/T$:

$$N = \int_0^{\infty} N_0 RC(f) df = \frac{N_0}{T}$$

Обработка сигнала в приемнике

- В приемнике I/Q демодулятор восстанавливает синфазную и квадратурную компоненты b_p , b_q , искаженные аддитивным шумом n_p , n_q . Затем следует пара СФ, готовящих сигналы для измерения d_p , d_q и принятия решений.



- Получим выражение для отношения сигнал/шум на выходе согласованного фильтра (слайды [Согласованный фильтр \(СФ\)](#), [Комплексное представление шума](#), [Полная система передачи](#)):

$$\frac{d_p^2 + d_q^2}{\sigma^2} = \frac{2E}{N_0} = \frac{\overline{b_p^2} + \overline{b_q^2}}{N_0} T$$

Спектр и вероятность битовой ошибки для BPSK модуляции

- Спектр для модуляции BPSK, с учетом фильтрации по Найквисту:

$$W = r_s (1 + \beta) = r_b (1 + \beta)$$

- Для вычисления BER потребуется функция $Q(z)$, которая определяет вероятность того, что значение стандартной нормальной (сигма=1, мю=0) гауссовской переменной $n(t)$ больше z (или значение z меньше $n(t)$):

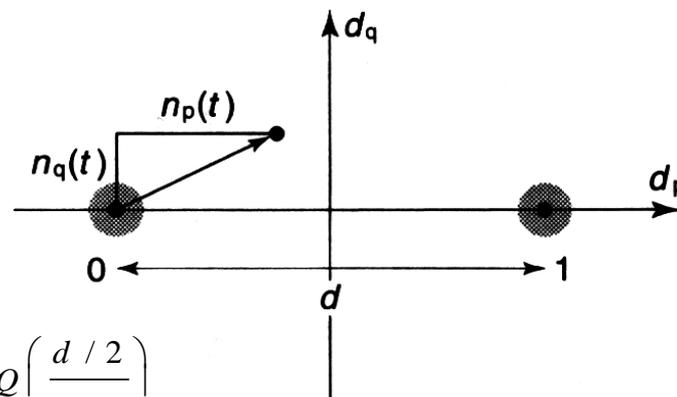
$$n(t) - \text{гаус. сл. процесс} : \mu = 0, \sigma \therefore P\{n(t) > a\} = Q\left(\frac{a}{\sigma}\right)$$

- Для вычислений $Q(z)$ может быть использована erfc – комплементарная функция ошибки

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} \exp(-y^2/2) dy \qquad Q(z) = \frac{1}{2} \text{erfc}(z/\sqrt{2})$$

Вероятность битовой ошибки для BPSK модуляции

- Ошибка возникает, когда $n_p > d/2$ (см. созвездие). Тогда вероятность ошибки определяется как:

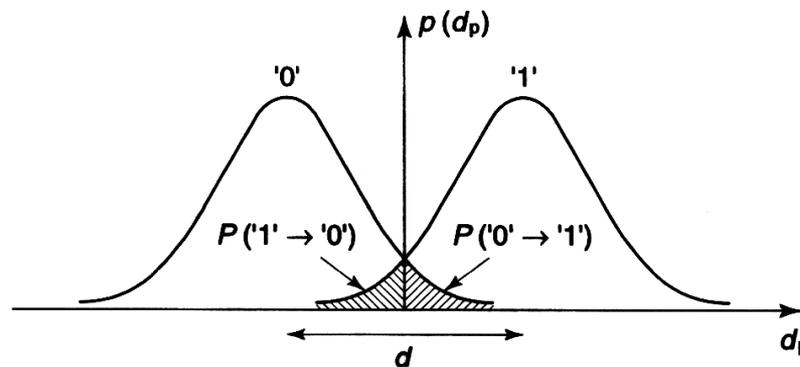


$$n(t) - \text{гаус. сл. процесс} \quad : \mu = 0, \sigma \therefore P\{n(t) > d/2\} = Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right)$$

$$P_e = \frac{1}{2}Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

$$\frac{d_p^2 + d_q^2}{\sigma^2} = \frac{d_p^2}{\sigma^2} = \frac{d^2}{4\sigma^2} = \frac{2E}{N_0} = \frac{2E_b}{N_0}$$

$$P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$



Вероятность битовой ошибки для QPSK модуляции

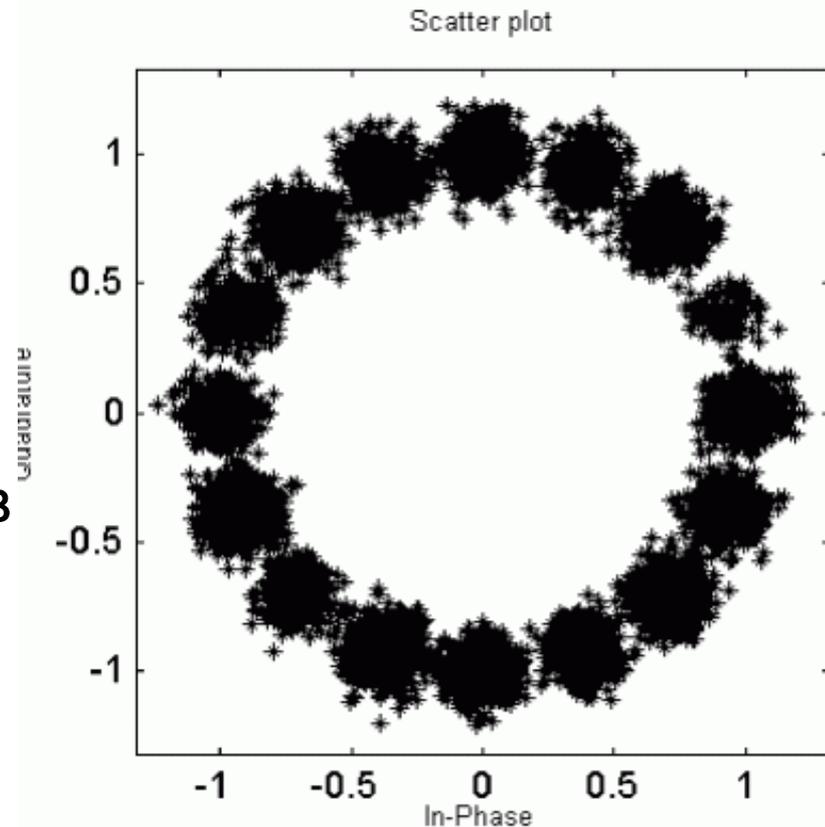
$$P_e = 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \quad \frac{d_p^2 + d_q^2}{\sigma^2} = \frac{2(d/2)^2}{\sigma^2} = \frac{d^2}{2\sigma^2} = \frac{2E}{N_0} = \frac{4E_b}{N_0}$$

$$P_b = \frac{P_e}{2} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad W = r_s(1 + \beta) = 0.5 \cdot r_b(1 + \beta)$$

- Энергетическая эффективность QPSK аналогична BPSK, а спектральная эффективность в 2 раза выше.

Вероятность битовой ошибки для MPSK модуляции (задача 3)

- MPSK модуляция определяет более 4-х фазовых состояний (см. рис).
- Количество состояний – степени 2, следовательно символьная скорость v $k = \log_2 M$ меньше битовой
- Определите P_e и P_b для $M=16$, а также W для маркировки состояний по Грейю.



BER и спектр для MPSK модуляции (решение задачи 3)

$$P_e = 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = 2Q\left(\frac{2A \sin(\pi/M)}{2\sigma}\right) = 2Q\left(\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\sqrt{\frac{2 \log_2(M) E_b}{N_o}}\right)$$

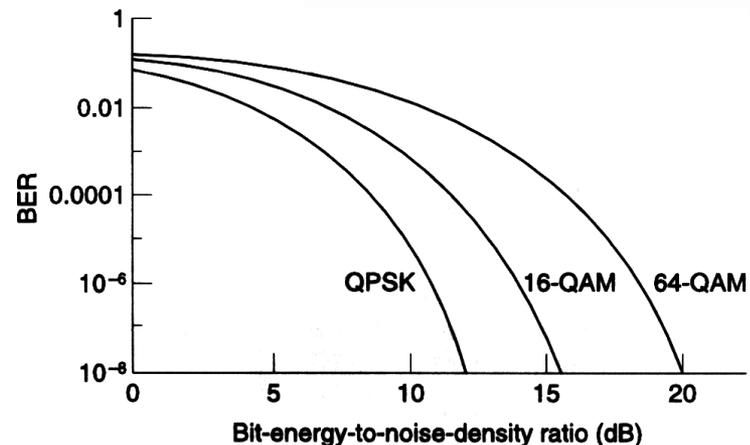
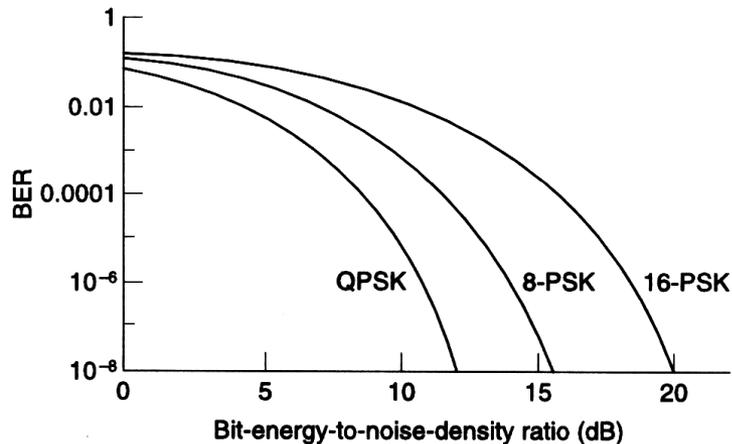
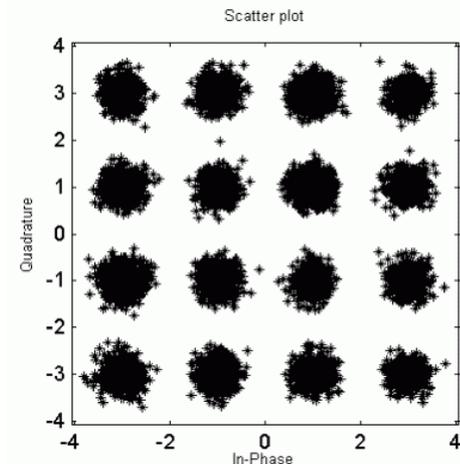
$$P_b = \frac{2}{\log_2(M)} Q\left(\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\sqrt{\log_2(M) \frac{2 E_b}{N_o}}\right)$$

$$W = r_s (1 + \beta) = \frac{r_b}{\log_2 M} (1 + \beta)$$

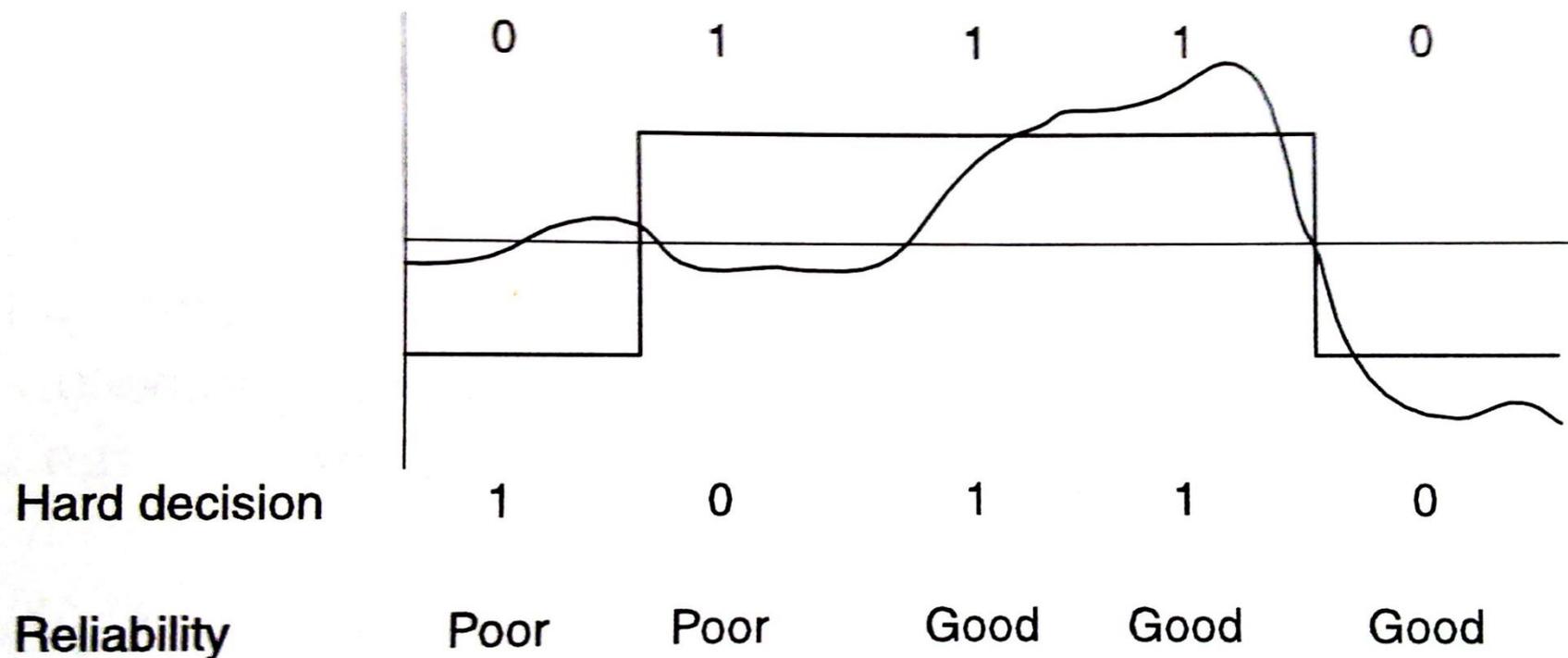
- Энергетическая эффективность MPSK меньше BPSK, QPSK, а спектральная эффективность выше.

Многоуровневые модуляционные схемы

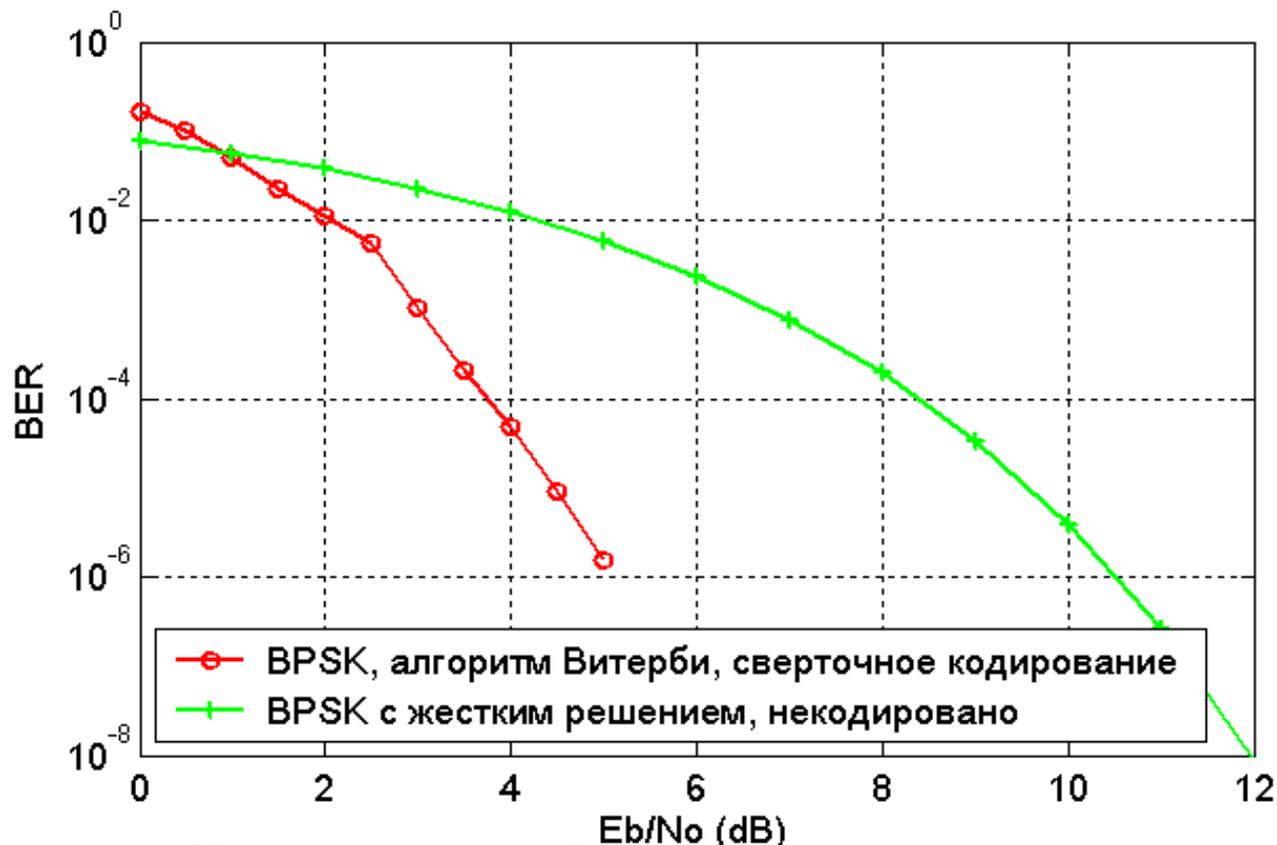
- Символы многоуровневых схем отличаются и фазой и амплитудой
- На графиках BER видны преимущества многоуровневых схем (QAM)
- Недостаток – мощность неодинакова для разных символов, что вызывает проблемы в нелинейных каскадах усиления сигнала и борьбе с мультипликативными помехами



Мягкое и жесткое принятие решений при обнаружении символа (Hard vs Soft Decision)



FEC (Forward Error Correction)

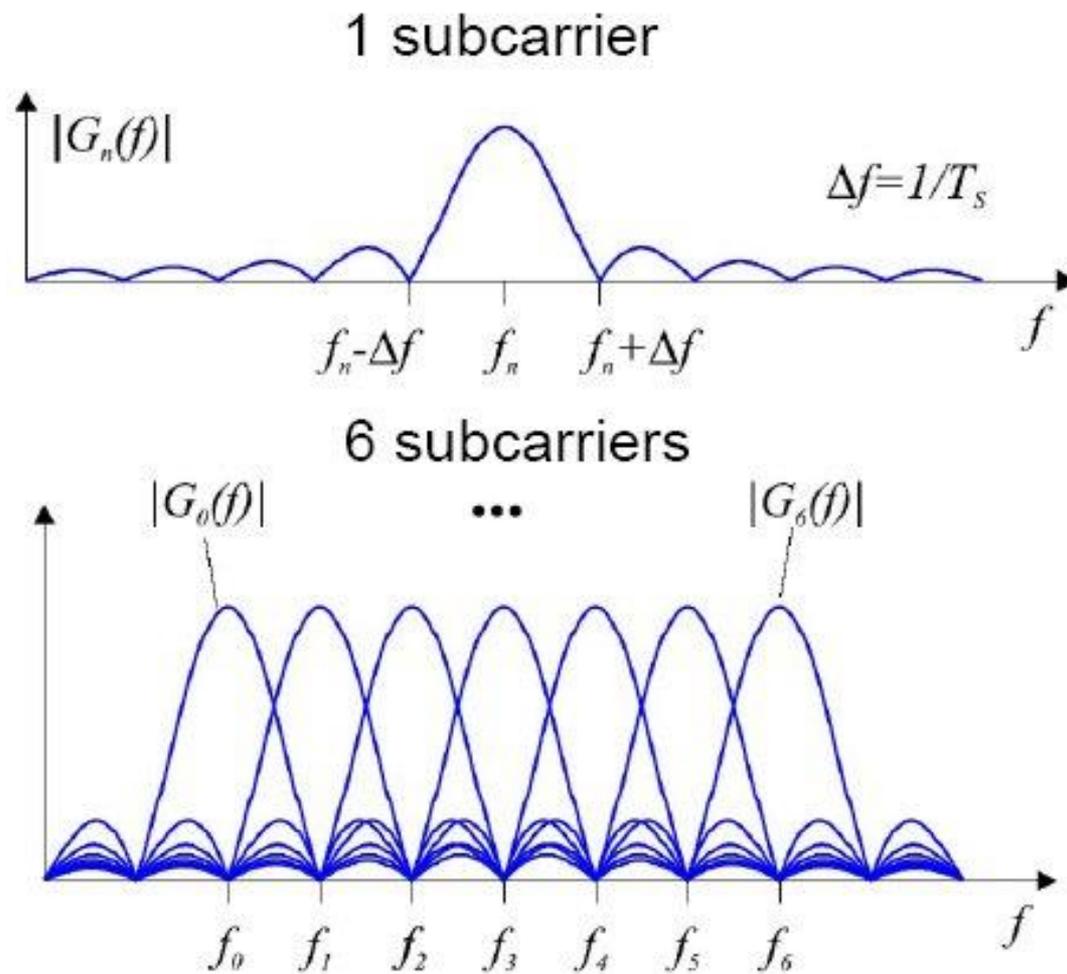


При демодуляции по АВ определяется набор условных вероятностей, соответствующих всем возможным кодовым векторам и принимается решение в пользу символа, соответствующего максимальной вероятности.

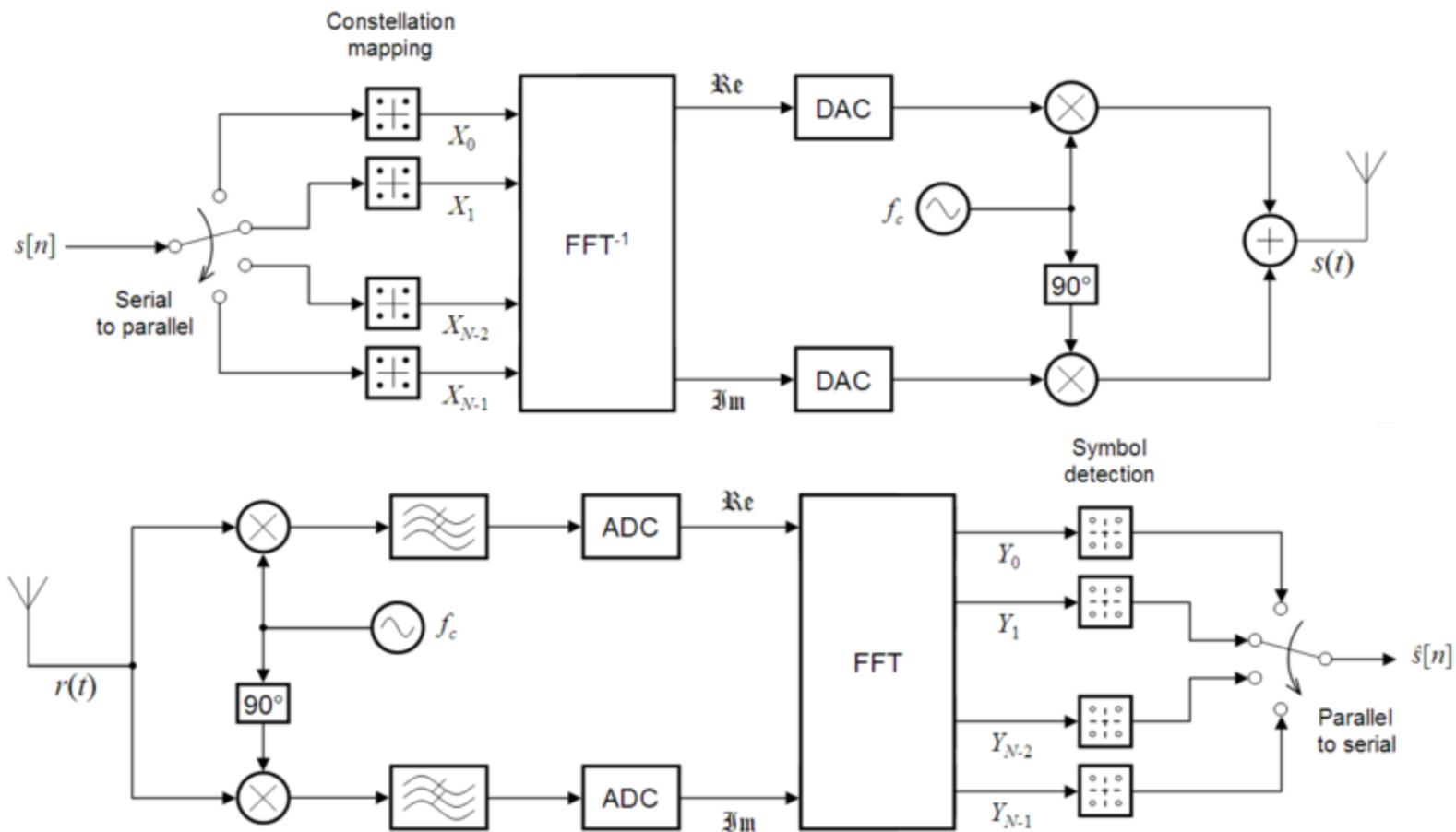
DMT, OFDM

- OFDM (Orthogonal frequency-division multiplexing) – модуляционная схема с множеством поднесущих (bin)
- Ортогональность поднесущих требует их разноса на $F=k/T$ (T – период символа)
- DMT (discrete multitone modulation) – это OFDM с адаптацией передачи к условиям в каждом подканале (bin)

Поднесущие - bins

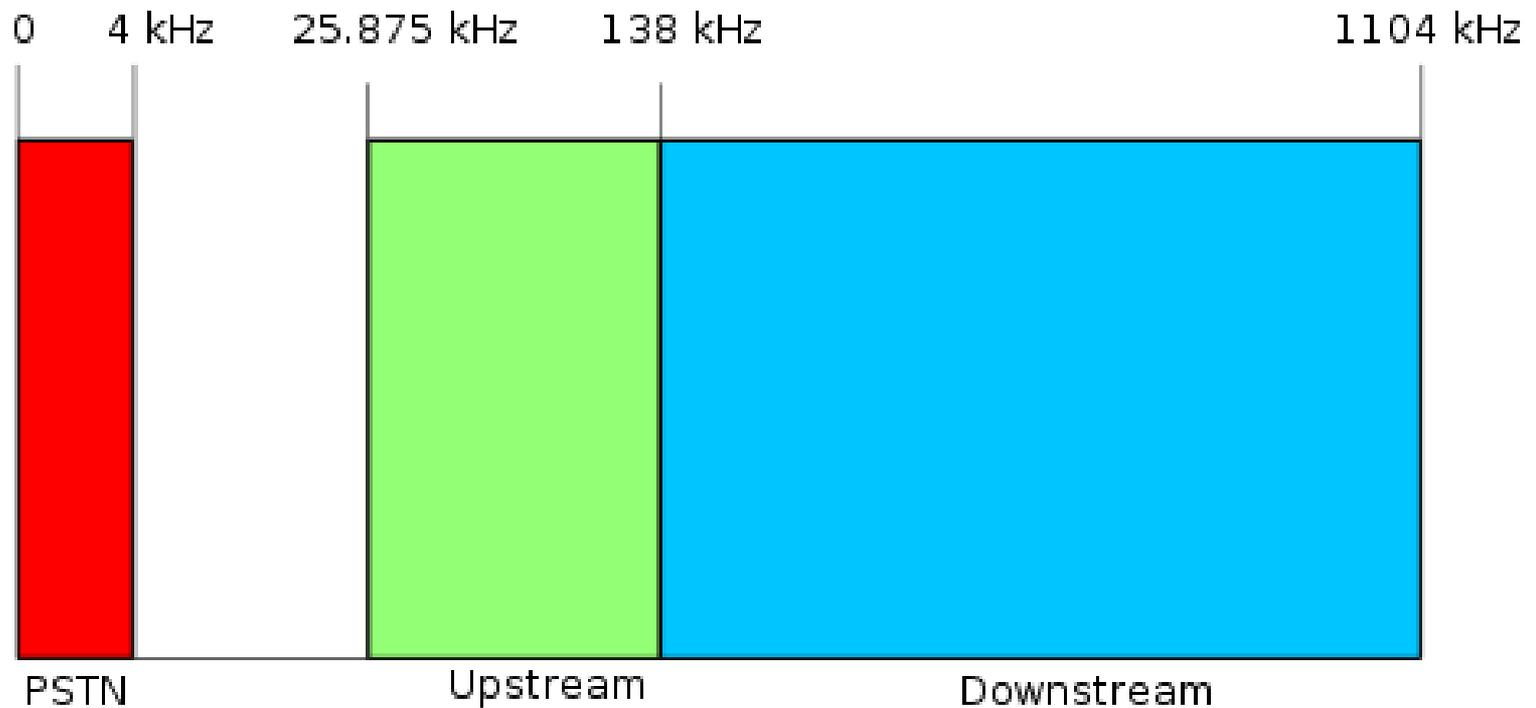


OFDM

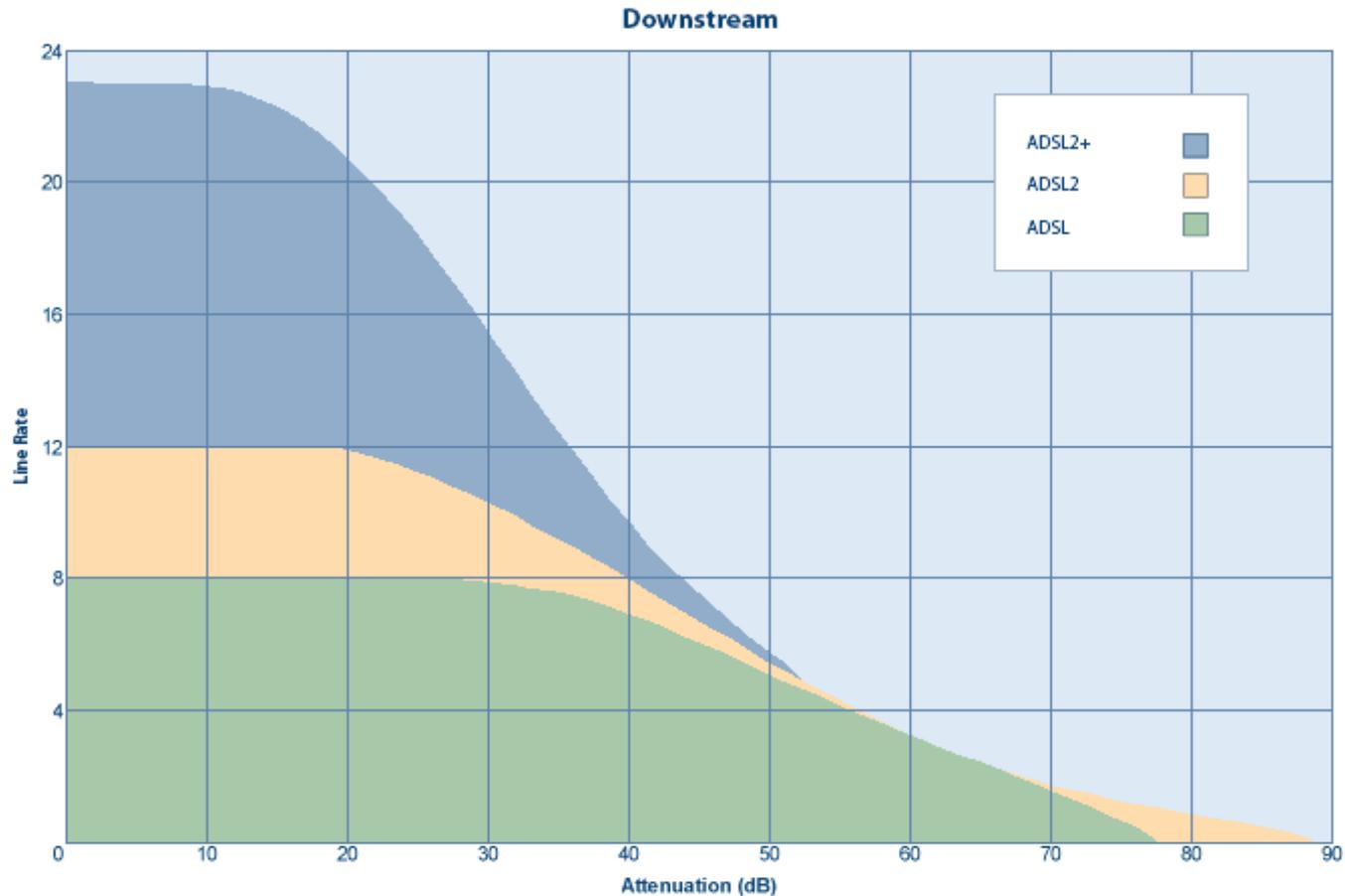


xDSL (Digital Subscriber Line)

ITU G.992.x



Затухание в ADSL линии и скорость передачи данных



ADSL характеристики

Alcatel 20190 chipset information

ATU-R (DS) ATU-C (US)

DSL Mode: **ITU G.992.5 (ADSL2+) Annex A**
ITU STD NUM: 0x03 0x2
DFE BOM: DFE3.0 Annex A (1)
Capacity Used: 45% 100%
Noise Margin: **24.0 dB** **11.0 dB**
Output Power: **20.0 dBm** **12.5 dBm**
Attenuation: **23.0 dB** **11.0 dB**

	DS Channel1	DS Channel0	US Channel1	US Channel0
Speed (kbps):	0	8000	0	989
Cells:	0	363505936	0	2420241064
Reed-Solomon EC:	0	11275	0	0
CRC Errors:	0	71	0	2
Header Errors:	0	55	0	0
Total BER:	0E-0	2E-7		

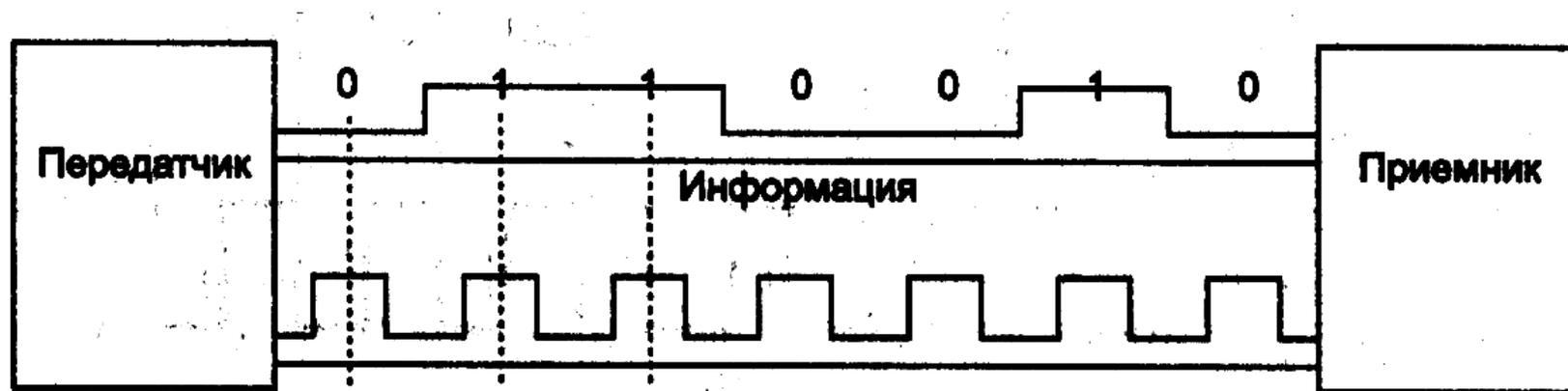
$NM = S/N(\text{прием}) - S/N(\text{мин})$

DMT Bits Per Bin

000: 0000007799ABBCC
010: DCDDDDCDDCCCBAA9
020: 0000022444566677
030: 7777788888888888
040: 88888888888788877
050: 8887777777777777
060: 7777777777777777
070: 7777777777777777
080: 7778778288888888
090: 8788777777877777
0A0: 7777777777878777
0B0: 7775577778878777
0C0: 8777777777777777
0D0: 7777767777777577
0E0: 7766667776675666
0F0: 6666666666667777
100: 7677677777777777
110: 6777776766777666
120: 5666666666666666
130: 5665555555555555
140: 5555555555555555
150: 5555555555555544
160: 5555540544444444
170: 44444444444444344
180: 4444322044440444
190: 4443434444433322
1A0: 3332000000002200
1B0: 2000022202222222
1C0: 2202022022222020
1D0: 0222002000000022
1E0: 2000000000000000
1F0: 0000000000000000

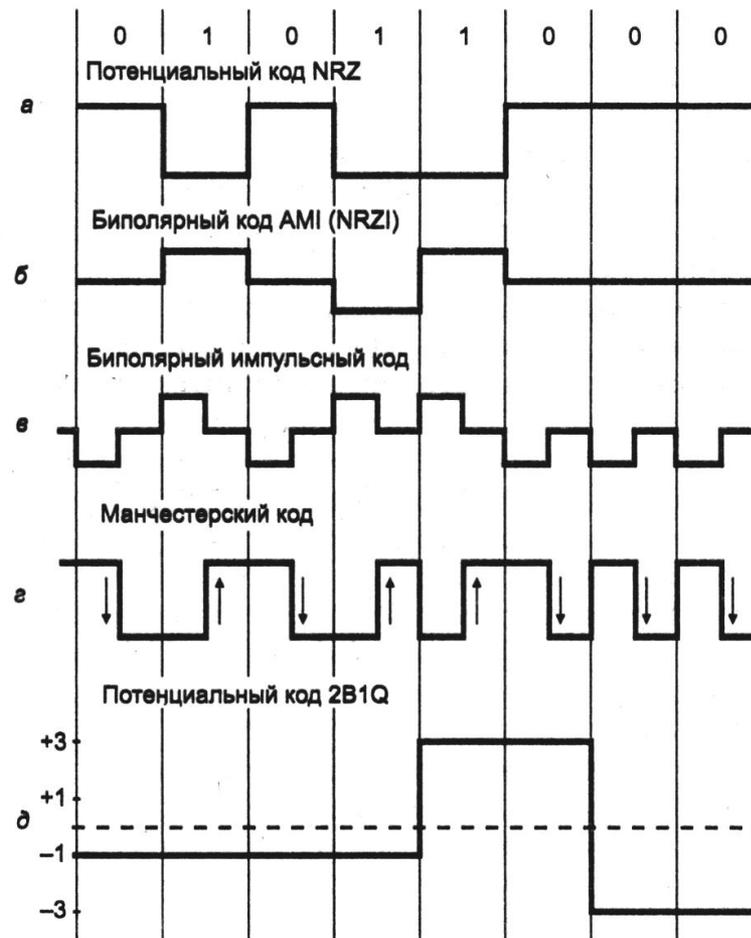
Синхронизация элементов сети

- Синхронизация приемника и передатчика



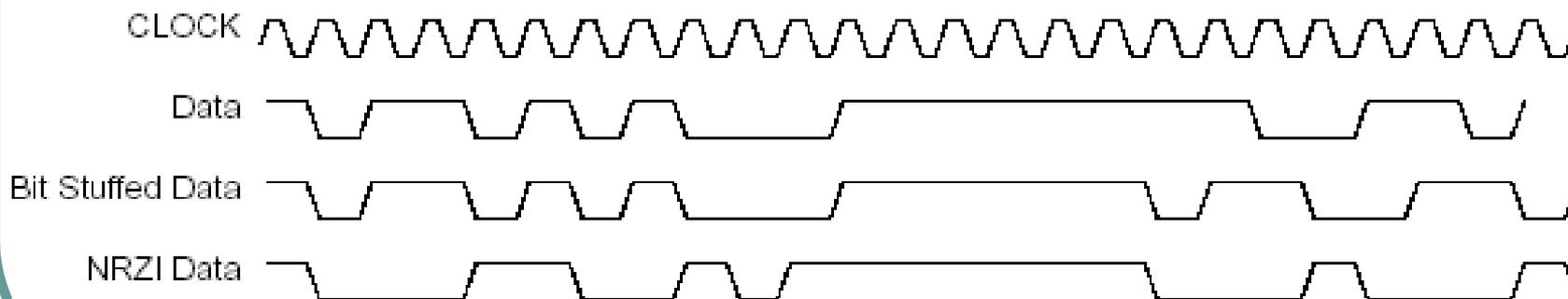
Цифровое кодирование (англ. термин - line encoding)

- Различия в:
 - ширине спектра;
 - способности к самосинхронизации;
 - присутствию постоянной составляющей;
 - способности обнаруживать/исправлять ошибки.



Пример USB1.1, самосинхронизация

- Используется кодирование NRZI (Non-Return to Zero Inverted)
- «0» передается изменением состояния линии каждый битовый период, при передаче «1» состояние не изменяется
- При передаче «1» более шести подряд, применяется вставка «0».



Временная диаграмма USB 1.1

Логическое кодирование

Исходный код	Результирующий код	Исходный код	Результирующий код
0000	11110	1000	10010
0001	01001	1001	10011
0010	10100	1010	10110
0011	10101	1011	10111
0100	01010	1100	11010
0101	01011	1101	11011
0110	01110	1110	11100
0111	01111	1111	11101

Код 4B/5B (FDDI, Fast Ethernet)

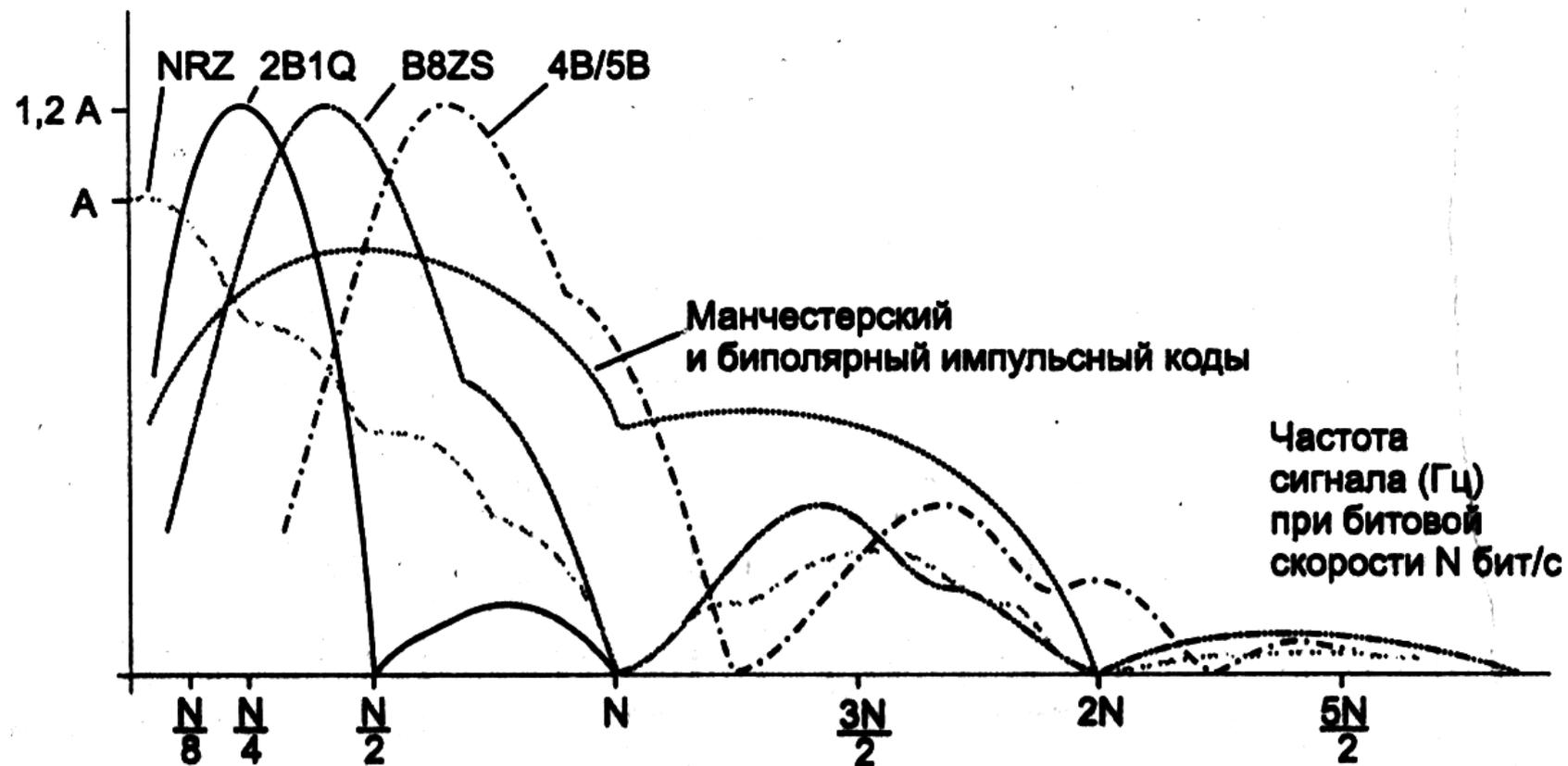
Скремблирование

- Скремблирование – один из способов логического кодирования
- На основе входной последовательности A вычисляется выходная B
- На приемной стороне выполняется обратное преобразование

$$B_i = A_i \oplus B_{i-3} \oplus B_{i-5}$$

$$C_i = B_i \oplus B_{i-3} \oplus B_{i-5} = (A_i \oplus B_{i-3} \oplus B_{i-5}) \oplus B_{i-3} \oplus B_{i-5} = A_i$$

Спектры кодированных последовательностей



Кодирование

- Результаты теории кодирования Хемминга
- Обнаружение и исправление ошибок
- Асинхронное и синхронное форматирование, ARQ - методы повторной передачи
- FEC

Простые коды

- Простые коды характеризуются тем, что для передачи информации используются все кодовые слова (комбинации), количество которых равно $N=q^n$ (q - основание кода, а n - длина кода)

Задачи кодирования и декодирования

- Задача кодирования заключается в получении при передаче для каждой k - элементной комбинации из множества q^k соответствующего ей кодового слова длиной n из множества q^n
- Задача декодирования состоит в получении k - элементной комбинации из принятого n - разрядного кодового слова при одновременном обнаружении или исправлении ошибок

Параметры помехоустойчивых КОДОВ

- Длина кода - n
- Длина информационной последовательности - k
- Длина проверочной последовательности – $r = n - k$
- Скорость кода – $R = k/n$
- Избыточность кода – $1/R$
- Кодовое расстояние между двумя кодовыми словами (расстояние Хэмминга) - это число позиций, в которых они отличаются друг от друга.
- Кодовое расстояние кода d_0 - это наименьшее расстояние Хэмминга между различными парами кодовых слов

Основные результаты

- Основные зависимости между кратностью обнаруживаемых ошибок t_0 , исправляемых ошибок t_u , исправлением стираний t_c и кодовым расстоянием d_0 кода:

$$d_0 \geq t_0 + 1; \quad d_0 \geq t_0 + t_u + 1 \quad (\text{при } t_0 > t_u);$$

$$d_0 \geq 2t_u + 1; \quad d_0 \geq 2t_u + t_c + 1.$$

$$d_0 \geq t_c + 1;$$

- Стиранием называется потеря значения передаваемого символа в некоторой позиции кодового слова, которая известна.
- Т.о. расстояние Хэмминга между верными кодовыми словами должно быть больше, чем оно может получиться в результате ошибок.

Граничные оценки для кодового расстояния

- Граница Хэмминга близка к оптимальной для высокоскоростных q-ного и двоичного кодов

$$n - k \geq \log_q \sum_{i=0}^{t_w} C_n^i \cdot (q-1)^i;$$

$$n - k \geq \log_2 \sum_{i=0}^{t_w} C_n^i.$$

- Границу Плоткина целесообразно использовать для низкоскоростных q-ного и двоичного кодов

$$d_0 \leq n \cdot (q-1) \cdot q^{k-1} / q^k - 1;$$

$$d_0 \leq n \cdot 2^{k-1} / 2^k - 1.$$

- Граница Варшамова-Гильберта показывает, при каком значении n - k определено существует код (q-ный и двоичный), гарантировано исправляющий ошибки

$$q^{n-k} > \sum_{i=0}^{d_0-2} C_{n-1}^i \cdot (q-1)^i$$

$$2^{n-k} > \sum_{i=0}^{d_0-2} C_{n-1}^i,$$

Контрольные суммы (Check Sum)

- Под контрольной суммой понимается значение, полученное путем сложения битов информационной последовательности:

$$Checksum = \left(\sum_i^{n-1} X_i \right) \bmod 2$$

- Пример использования: т.н. бит паритета в RS-232 для каждого байта (см. временную диаграмму).
- Позволяет обнаруживать однократные ошибки (в случае нескольких – нечетное количество).

Применение паритета RS-232

- Предположим, что $BER=10^{-4}=p$. Тогда вероятность отсутствия ошибки отдельного бита $(1-p)$, а всех семи бит $(1-p)^7$.
- Вероятность передачи 7 бит с любой ошибкой тогда составит $1-(1-p)^7 = 6,9979 \times 10^{-4}$.
- Добавление бита четности позволяет детектировать любую ошибку в одном из переданных бит и вероятность ошибки только в одном из 8 бит равна $8p(1-p)^7 = 7,9944 \times 10^{-4}$.
- Вероятность реализации необнаруженной ошибки составит $1 - (1-p)^8 - 8p(1-p)^7 = \sim 2,8 \times 10^{-7}$.
- Таким образом, введение бита паритета в RS-232, уменьшает вероятность необнаруженной ошибки на три порядка.

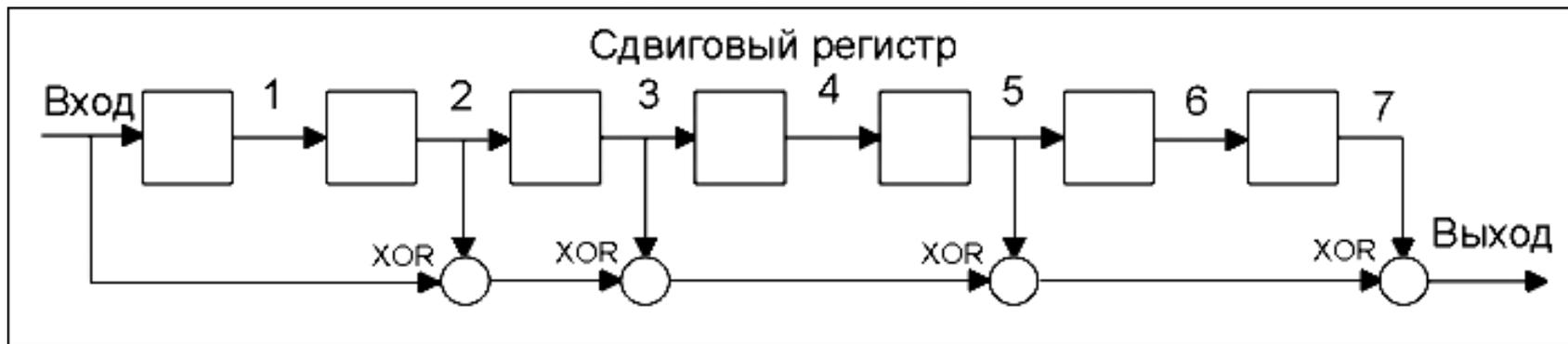
Циклический контрольный код (Cyclic Redundancy Code, CRC)

- Двоичная последовательность длиной n представляется как набор коэффициентов полинома степени $n-1$ $M(x)$
- $G(x)$ – порождающий полином степени r
- $x^r * M(x) + (x^r * M(x)) \bmod G(x) = T(x)$ – данные для передачи
- Если $T(x)/G(x) = 0$ – ошибки не обнаружены
- Вероятность невыявления ошибки 0.5^r

Cyclic Redundancy Code (CRC)

- CRC-12 = $x^{12} + x^{11} + x^3 + x^2 + x^1 + 1$
- CRC-16 = $x^{16} + x^{15} + x^2 + 1$
- CRC-CCITT = $x^{16} + x^{12} + x^5 + 1$
- CRC-32 =
 $x^{32} + x^{26} + x^{23} + x^{22} + x^{16} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$

Аппаратная реализация CRC



$$G(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^5 + x^7$$

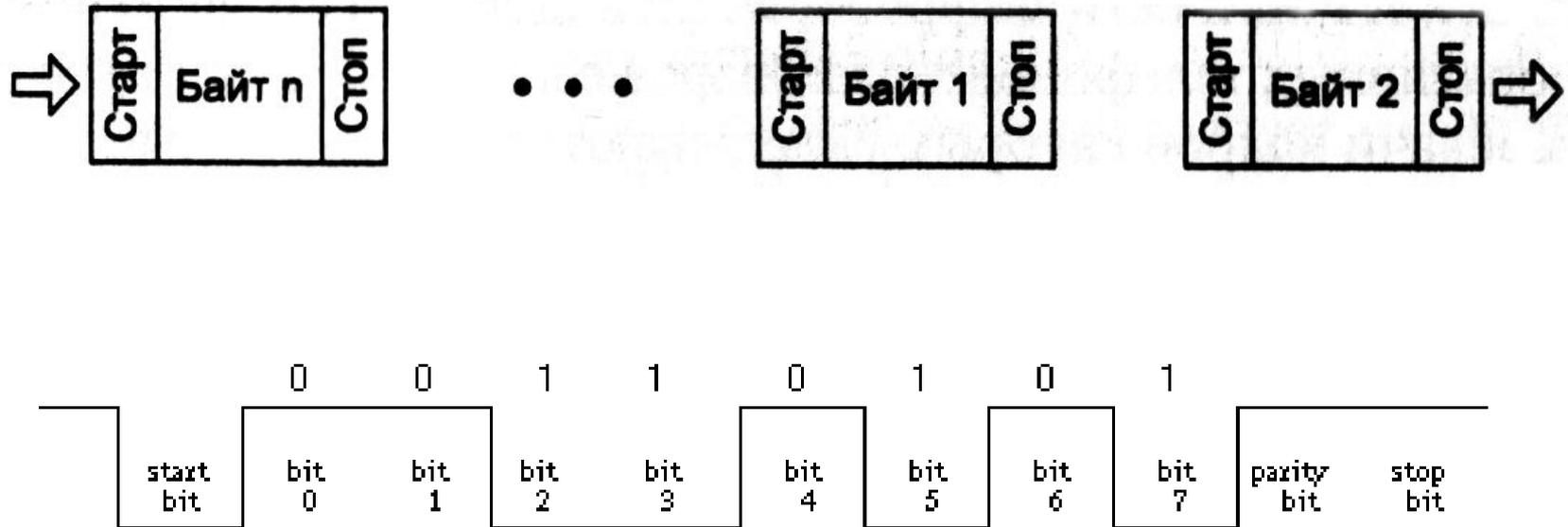
Методы передачи 2-го уровня

- Асинхронные протоколы
 - передаются отдельные символы, которые представлены байтами со старт-стоповыми символами
- Синхронные протоколы
 - передаются кадры символов или битов
 - символно-ориентированные
 - бит-ориентированные

Асинхронное и синхронное форматирование

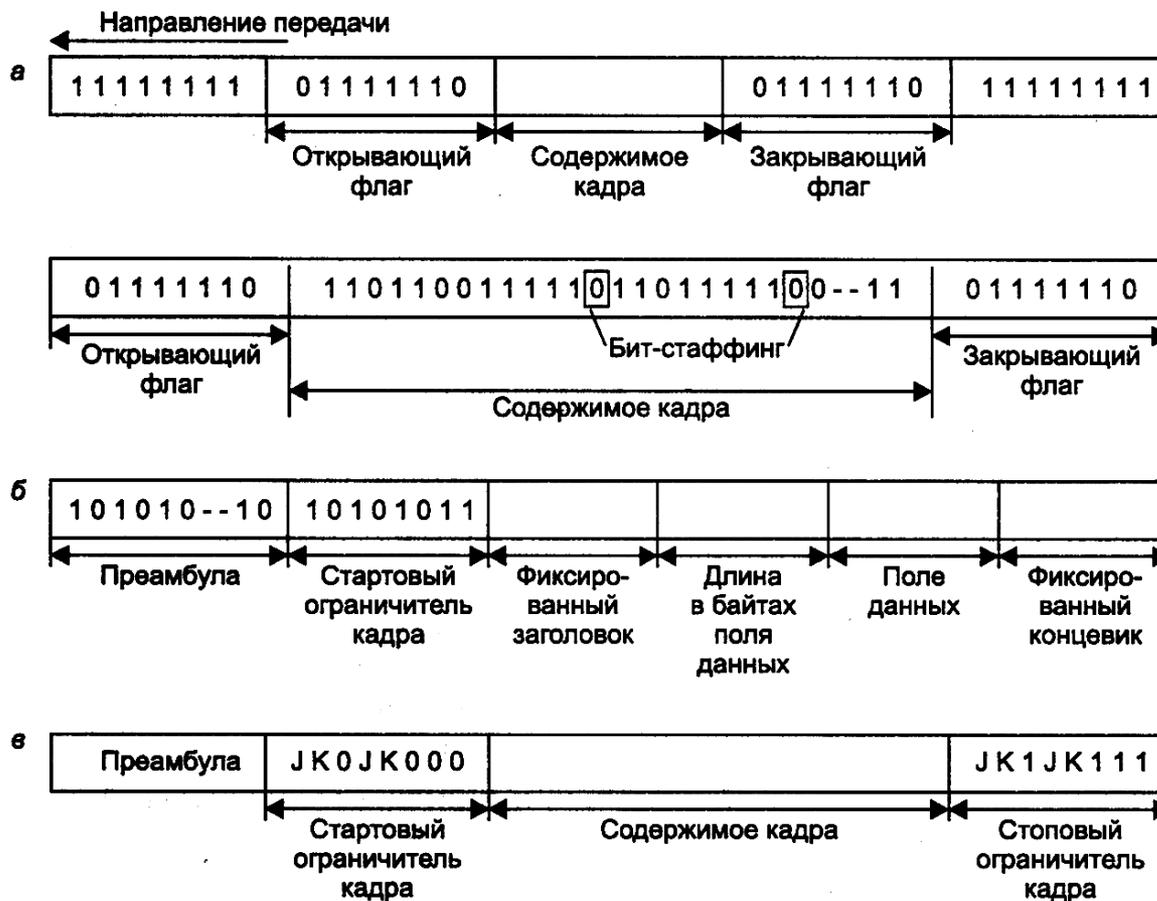
- Асинхронный формат
 - старт-стопный механизм
- Синхронный формат
 - выделенный канал синхронизации
 - самосинхронизирующиеся коды
 - bit stuffing

Асинхронный формат, пример RS-232



Временная диаграмма передачи байта RS-232

Синхронные форматы



ARQ-методы

а – с
простоями,
Idle source

б, в -
Скользящее
окно, Sliding
window

Переход к
кадру N, Goto
N

