9 класс

1. Тело, состоящее из куска льда и вмерзшего в него алюминиевого бруска, плавает в воде так, что под водой находится $\alpha = 0,95$ объема тела. Какой процент льда должен растаять, чтобы тело полностью погрузилось в воду? Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 10^3\,\text{кг/м}^3$, льда $\rho_{\text{л}} = 900\,\text{кг/м}^3$, алюминия $\rho_a = 2.7 \cdot 10^3\,\text{кг/м}^3$.

<u>Решение</u>
Условие плавания
$$F_{\text{арх}} = m_{\text{общ}} g. \tag{21}$$
С учетом условия задачи
$$\rho_{\text{в}} g \alpha V_{\text{общ}} = (m_{\text{ал}} + m_{\text{л}}) g, \tag{22}$$
$$\rho_{\text{в}} \alpha \left(V_{\text{л}} + V_{\text{ал}}\right) = \rho_{\text{л}} V_{\text{л}} + \rho_{\text{ал}} V_{\text{ал}}. \tag{23}$$
После того, как растаяла часть льда β и тело стало плавать полностью погруженным в воду, получаем
$$\rho_{\text{в}} \left(V_{\text{л}}(1-\beta) + V_{\text{ал}}\right) = \rho_{\text{л}} V_{\text{л}}(1-\beta) + \rho_{\text{ал}} V_{\text{ал}}. \tag{24}$$
Разделим уравнения (23) и (24) на $V_{\text{л}}$, введем обозначение $\gamma = \dfrac{V_{\text{ал}}}{V_{\text{л}}}$, в результате получим систему уравнений с неизвестными γ и β:
$$\begin{cases} \rho_{\text{в}} \alpha \left(1+\gamma\right) = \rho_{\text{л}} + \rho_{\text{ал}} \gamma, \\ \rho_{\text{в}} \left(1-\beta+\gamma\right) = \rho_{\text{л}}(1-\beta) + \rho_{\text{ал}} \gamma. \end{cases} \tag{25}$$
Исключая γ, находим
$$1-\beta = \frac{\rho_{\text{ал}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}} \frac{\alpha \rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{ал}} - \alpha \rho_{\text{в}}}. \tag{26}$$
Отсюда находим
$$\beta \approx 0.51$$
Ответ: 51%
<u>Критерии оценки</u>
1. Правильно записаны условия плавания с учетом данных задачи (23) и (24): *5 баллов*
2. Решена полученная система уравнений (25): *3 балла*
3. Получен правильный численный ответ: *2 балла*
Максимальная оценка *10 баллов*

2. Некоторое количество воды нагревается электронагревателем мощностью $P = 500$ Вт. При включении нагревателя на время $\tau_1 = 2$ мин температура воды повысилась на $\Delta T = 1$ К, а при его отключении - понизилась за время $\tau_2 = 1$ мин на ту же величину ΔT. Какова масса нагреваемой воды, если потери тепла за счет рассеяния в окружающую среду пропорциональны времени? Удельная теплоемкость воды $c = 4200\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\,^\circ C}$.

<u>Решение</u>
При нагревании воды закон сохранения энергии имеет вид:
$$P\tau_1 = cm\Delta T + G\tau_1, \tag{27}$$

а при остывании –

$$cm\Delta T = G\tau_2. \tag{28}$$

Здесь G – мощность отдачи тепла в окружающую среду. Из уравнений (27) и (28) находим

$$m = \frac{P\tau_1\tau_2}{c\Delta T(\tau_1+\tau_2)} = 4.8\,\text{кг}. \tag{29}$$

Ответ 4.8 кг.

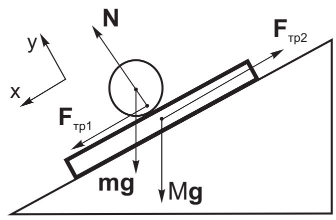
Критерии оценки

1. Правильно записан закон сохранения для нагревании (27): *3 балла*
2. Правильно записан закон сохранения для остывания (28): *3 балла*
2. Решена полученная система уравнений (29): *3 балла*
3. Получен правильный численный ответ: *1 балл*

Максимальная оценка *10 баллов*

3. Доска массой М может двигаться без трения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. С каким ускорением должна бежать по доске собака массой m, чтобы доска не соскальзывала с наклонной плоскости? Каким должен быть коэффициент трения между лапами собаки и доской, чтобы задача имела решение?

Решение



Очевидно, что собака должна бежать по доске вниз. Между лапами собаки и доской будут действовать силы трения, приложенные к собаке и доске как показано на рис. Они связаны между собой третьим законом Ньютона, следовательно: $F_{тр1} = F_{тр2} \equiv F_{тр}$. Тогда второй закон Ньютона для собаки в проекции на ось x

$$ma = F_{тр} + mg\sin\alpha, \tag{30}$$

для доски в проекции на ту же ось

$$0 = -F_{тр} + Mg\sin\alpha. \tag{31}$$

Из уравнений (30) и (31) находим

$$a = g\sin\alpha\frac{M+m}{m}. \tag{32}$$

Максимально возможное значение силы трения $F_{тр} = \mu N$. Запишем для собаки второй закон Ньютона в проекциях на ось y:

$$0 = N - mg\cos\alpha \tag{33}$$

и с учетом (31) получаем

$$\mu \geqslant \frac{M}{m}\operatorname{tg}\alpha. \tag{34}$$

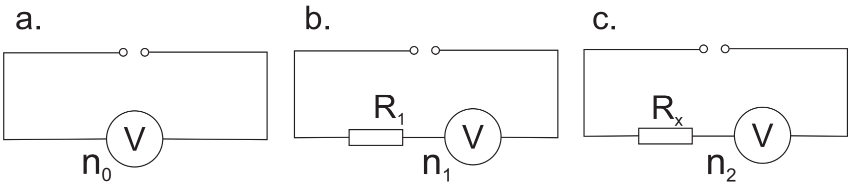
Ответ: $a = g\sin\alpha\dfrac{M+m}{m}$, $\mu \geqslant \dfrac{M}{m}\operatorname{tg}\alpha$.

Критерии оценки

1. Правильно направлены силы трения, действующие на собаку и доску: *2 балла*
2. Правильно записаны уравнения, выражающие второй закон Ньютона для собаки и доски в проекции на ось x (30) и (31): *3 балла*

2. Решена полученная система уравнений и получен ответ на первый вопрос задачи (32): *3 балла*
3. Получен правильный ответ на второй вопрос: *2 балла*
Максимальная оценка *10 баллов*

4. Имеются резисторы, сопротивление одного из них $R_1 = 0.5$ кОм, а другого R_x нужно измерить. Для этого, использовав источник постоянного электрического напряжения, собрали три цепи (см. рис. a, b, c). В первом случае стрелка вольтметра отклонилась на $n_0 = 16$ делений его шкалы, во втором – на $n_1 = 12$ делений и в третьем – на $n_2 = 10$ делений. Определите по этим данным сопротивление R_x второго резистора.



Решение
Обозначим цену деления вольтметра α, показания вольтметра в первом случае $U_0 = \alpha n_0$ равны напряжению источника. Во втором случае: показания вольтметра $U_1 = \alpha n_1$, напряжение на резисторе R_1 равно $U_{R_1} = U_0 - U_1 = \alpha(n_0 - n_1)$. При последовательном соединении сила тока одинакова:

$$\frac{\alpha n_1}{R_v} = \frac{\alpha(n_0 - n_1)}{R_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{R_v} = \frac{(n_0 - n_1)}{R_1}, \tag{35}$$

здесь R_v – сопротивление вольтметра.

Для третьего случая аналогично получаем

$$\frac{\alpha n_2}{R_v} = \frac{\alpha(n_0 - n_2)}{R_x} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{R_v} = \frac{(n_0 - n_2)}{R_x}. \tag{36}$$

Решая совместно уравнения (35) и (36), находим

$$R_x = \frac{n_1(n_0 - n_2)}{n_2(n_0 - n_1)} R_1 = 0.9\,\text{кОм}. \tag{37}$$

Ответ: 0.9 кОм.
Критерии оценки
1. Записаны показания вольтметра через цену деления и выражено напряжение на клеммах источника: *2 балла*
2. Правильно записан закон Ома и равенство токов для второго случая (35): *2 балла*
3. Правильно записан закон Ома и равенство токов для третьего случая (36): *2 балла*
4. Решена полученная система уравнений и записан ответ в общем виде (37): *3 балла*
5. Получен правильный численный ответ: *1 балл*
Максимальная оценка *10 баллов*

5. Перед переездом на абсолютно пустой дороге стоит автомобиль. На светофоре указано, что переезд откроется через τ секунд. Водителю необходимо попасть в точку за переездом, расстояние до которой от автомобиля равно S, за минимальное время. Считать, что автомобиль может двигаться только с постоянным по модулю ускорением

a как вперед так и назад, при разгоне и торможении. Определить минимальное время, за которое автомобиль может добраться до нужной точки.

Решение

Водитель может поступить следующим образом.

1-й вариант. Дождаться открытия переезда и двигаясь с ускорением a достигнуть требуемой точки. Для этого необходимо время

$$t_I = \tau + \sqrt{\frac{2s}{a}}. \tag{38}$$

2-й вариант. Водитель может использовать другую стратегию: к моменту открытия переезда необходимо приобрести максимально возможную скорость. Для этого необходимо за то время, пока закрыт переезд (τ): начать двигаться назад с ускорением a, далее тормозить с тем же ускорением, на мгновение остановиться и начать движение с ускорением a в сторону переезда так, чтобы оказаться у переезда к моменту его открытия. Очевидно, что при движении назад время разгона (t_0) будет равно времени торможения (t_0), тогда расстояние, на которое автомобиль отъедет от переезда

$$s_0 = \frac{at_0^2}{2} + \frac{at_0^2}{2} = at_0^2.$$

Тогда автомобиль должен будет за время $\tau - 2t_0$ вернуться к переезду

$$s_0 = \frac{a(\tau - 2t_0)^2}{2}.$$

Приравнивая выражения для s_0, находим

$$t_0 = \frac{\tau}{2+\sqrt{2}}. \tag{39}$$

Кроме того, начиная движение из точки остановки, автомобиль двигаясь без начальной скорости должен будет пройти расстояние $s_0 + s$, затратив на это время t_x:

$$s_0 + s = \frac{at_x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_x = \sqrt{\frac{2(s_0+s)}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{a} + 2t_0^2}.$$

Отсюда полное время для второго случая

$$t_{II} = 2t_0 + t_x = 2t_0 + \sqrt{\frac{2s}{a} + 2t_0^2}. \tag{40}$$

Здесь t_0 дается выражением (39). Очевидно, что вторая стратегия потребует меньше времени, т.е. $t_{II} < t_I$.

Ответ: $2t_0 + \sqrt{\frac{2s}{a} + 2t_0^2}$, где $t_0 = \frac{\tau}{2+\sqrt{2}}$.

Критерии оценки

1. Правильно найдено время движения в первом случае (38): *1 балл*
2. Правильно описана стратегия для второго случая: *3 балла*
3. Правильно найдено время движения во втором случае (40), (39) : *4 балла*
4. Сделан вывод о том, что время во втором случае меньше: *2 балла*

Максимальная оценка *10 баллов*